A képakasztó játék

Vígh Viktor

Az $(1,6)$-feladat egy megoldása

Spivak kérdése

A. Spivak a Quantum magazin 1997. május-júniusi számában [4] tűzte ki a következő fejtörőt „Különös festmény” címen: „Dr. Smile rendelőjének várótermében egy kép lóg a falon. A kép különlegessége abban rejlik, ahogy fel lett akasztva. Dr. Smile egy helyett kettő szöget vert a falba, és úgy akasztotta fel rájuk a festményt, hogy ha bármelyik szöget kihúzzuk, a festmény leesik. Hogyan csinálta?”

Az általános kérdés

Demaine és társai [1] fogalmazták meg a jelenleg ismert legáltalánosabb formában a problémát:

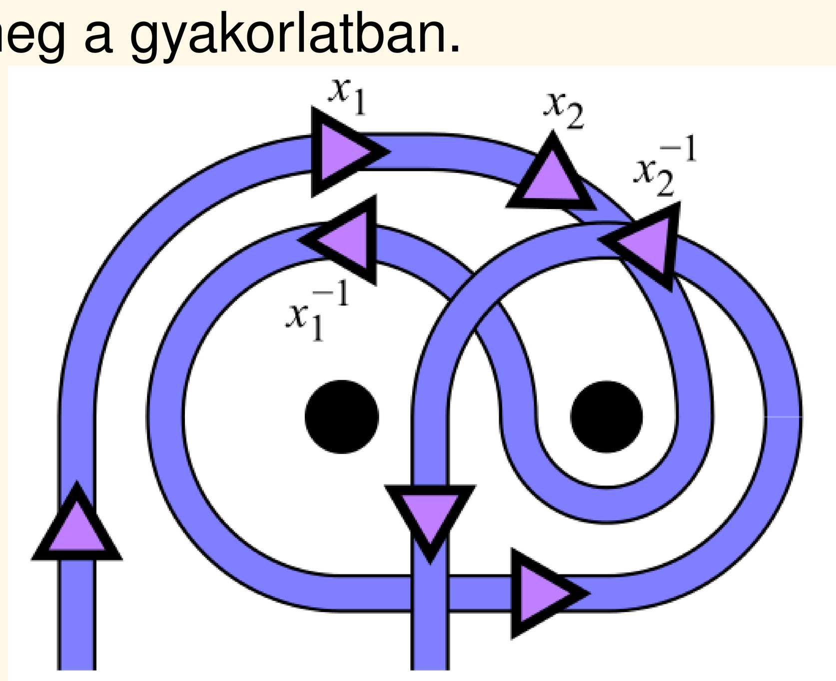
Probléma

Adott n szög a falban, és legyenek $S_1, S_2, \dots, S_k$ az n szög halmazának tetszőleges részhalmazai. Hogyan akasszuk fel a képet az n szögre úgy, a festmény pontosan akkor essen le, ha a kihúzott szögek halmaza tartalmazza valamely S_i halmazt?

Speciálisan ha az S_i halmazok pontosan az összes ℓ-elemű részhalmazok, akkor **(ℓ, n)-játékról** beszélünk. Ezzel a terminológiával Spivak feladata az $(1,2)$-játéknak felel meg.

Reprezentáció szabad csoporttal

Számozzuk meg a szögeket 1-től n-ig, és irányítsuk a madzagot. Reprezentálja x_i azt, hogy a kötelet i. szög fölött egyszer jobbra (az óramutató járásával megegyező irányban) elvezetjük, x_i^{-1} pedig hogy balra (az óramutató járásával ellenkező irányban) húzzuk el. Így a kötél egy felhurkolását reprezentálhatjuk az $x_1, x_2, \dots, x_n$ szimbólumok által generált szabad csoport egy elemével [5]. Világos, hogy az egymás mellé kerülő inverz elemek egyszerűsíthetőek, aminek a kötél szabad lefűződése felel meg a gyakorlatban.



Az $x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$ fűzés (forrás: [1])

A továbbiakban egy **felfűzés hosszán mindig az őt reprezentáló szó hosszát értjük**.

1. Tétel (Demaine et al. [1], 2012)

*A fenti Problémának tetszőleges $n \geq 1$ szögszám, és tetszőleges, **páronként diszjunkt** $S_1, S_2, \dots, S_k$ részhalmazok esetén létezik olyan megoldása, amely legfeljebb $2nk$ hosszú.*

Következmény

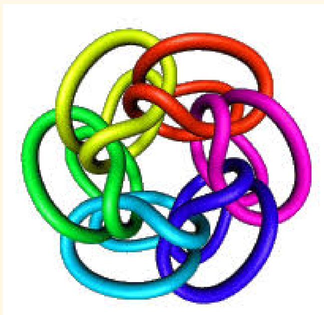
Az $(1,n)$-problémának van legfeljebb $2n^2$ hosszú megoldása.

Rekurzív megoldások

Az $(1,n)$-problémacsaláddal foglalkozunk, ebből az általános probléma megoldása adódik diszjunkt S_i halmazokra, ha minden S_i-t egy szögnek tekintünk. A szabad csoport egy szava pontosan akkor reprezentálja az $(1,n)$-probléma megoldását, ha nem egyszerűsíthető üres szóvá, de ha bármely generáló karaktert (az inverzével együtt) töröljük a szóból, a maradék kifejezés az üres szóvá egyszerűsíthető.

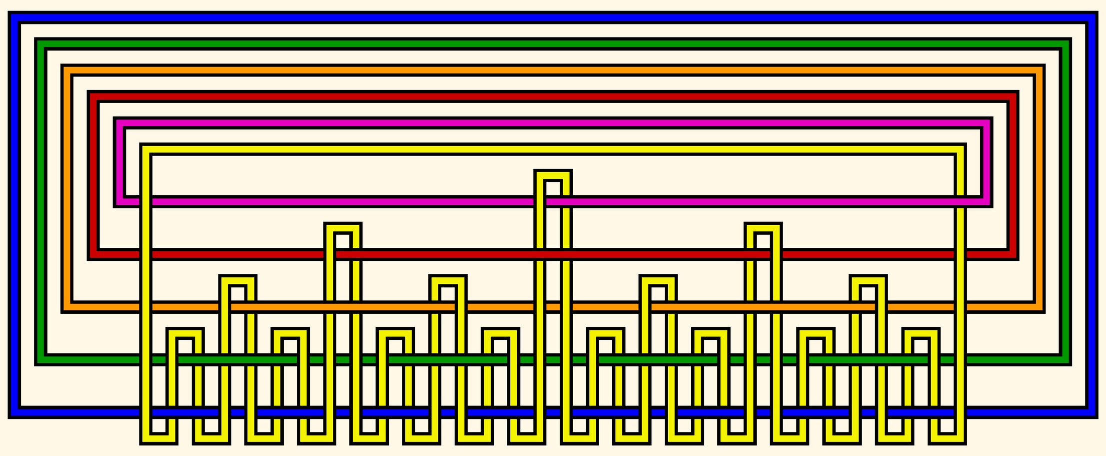
Az $n = 2$ esetben az ábrán is látható $[x_1, x_2] = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$ fűzés megoldás. Valamint ha $n_1 + n_2 = n$, továbbá M_{n_1} és M_{n_2} rendre az $(1, n_1)$-probléma és az $(1, n_2)$-probléma egy-egy megoldása (diszjunkt szimbólumhalmazokkal), akkor könnyű belátni, hogy $[M_{n_1}, M_{n_2}]$ az $(1,n)$-probléma megoldása. A megoldások hosszára vonatkozó korlát a konstrukció egyszerű következménye.

Topológiai konstrukció: Brunn-láncok



Brunn-láncnak nevezünk egy olyan nem triviális láncot, amely csupa triviális csomókból (gyűrűkből) áll, és bármely komponensét eltávolítva a maradék lánc triviálissá válik (azaz szemeire esik szét).

Ha a képakasztó játék szögeit projektív egyeneseknek képzeljük el, könnyen beláthatjuk, hogy az $(1, n-1)$-játék egy megoldásában a szögek és a zsinór együtt egy n-komponensű Brunn-láncot alkotnak; s fordítva: **minden n-komponensű Brunn-láncból megkaphatjuk az $(1, n-1)$-játék legalább egy (és legfeljebb n különböző) megoldását**. A Brunn-láncok teljes klasszifikációját Milnor adta meg 1954-ben [3].



(képek forrása: Wikipedia és knotplot.com)

Monoton Boole-függvények

Minden n szögre történő p felfűzésre definiálhatjuk a $f_p(r_1, \dots, r_n)$ Boole-függvényt, amely pontosan akkor ad vissza igaz értéket, ha az igaz értékeket kapó r_i változókhoz tartozó x_i szögeket kihúzva a kép leesik. Világos, hogy az f_p Boole-függvény monoton: ha valamely helyen igaz értéket vesz fel, akkor további r_i változókat is igazra állítva az értéke továbbra is igaz marad.

2. Tétel (Demaine et al. [1], 2012)

Minden monoton Boole-függvény valamely p fűzéshez tartozó f_p függvény.

Következmény

Az általános Problémának tetszőleges $S_1, S_2, \dots, S_k$ részhalmazok esetén van megoldása.

A megoldások hossza

A 2. Tétel bizonyításából adódó módszer általában n-ben exponenciális hosszú megoldásokat ad. [1]-ben elégséges feltételt adtak arra, hogy egy monoton Boole-függvény polinomiális hosszúságú fűzéssel reprezentálható legyen, speciálisan azt is igazolták, hogy **a (k,n)-problémának létezik polinomiális hosszúságú megoldása**. Általában azonban már az $(1,n)$-probléma legrövidebb megoldásának hossza sem ismert. Dumitrescu és Ghosh számítógéppel igazolta, hogy $n \leq 5$ esetén a fenti rekurzív módszer optimális.

3. Tétel (Fulek és Avvakumov [2], 2017)

A $(1,n)$-játék megoldása legalább $n2^{\sqrt{\log_2 n}}$ hosszú.

Irodalom

[1] Demaine, E. D., Demaine, M. L., Minsky, Y. N., Mitchell, J. S. B., Rivest, R. L., and Patrascu, M.: Picture-Hanging Puzzles, Theory of Computing Systems, 54(2012), 531–550.

[2] R. Fulek and S. Avvakumov: A picture hanging puzzle, Bárány 70 Conference, Budapest, Rényi Institute 2017, https://www.youtube.com/watch?v=OTdOvudR3qQ

[3] J. Milnor: Link Groups, Annals of Mathematics, 59 (1954): 177–195.

[4] A. Spivak: Brainteasers B 201: Strange painting, Quantum, 3 (1997), p.13.

[5] http://homepages.ulb.ac.be/~slanger/cg/2014/PictureHanging/picture_hanging.html

Vígh V., SZTE TTIK Bolyai Intézet, H-6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1, http://www.math.u-szeged.hu/tagok/vigvik