Páros összehasonlítás mátrixok empirikus vizsgálata

Bozóki Sándor

MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport

Budapesti Corvinus Egyetem

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

2010. április 23.

Az előadásban

Temesi Józseffel, **Dezső Lindá**val és **Poesz Attilá**val

közös kutatásaink előzményei és célkitűzései szerepelnek.

Temesi József: BCE Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

Dezső Linda: BCE ISP, SZTE-GTK

Poesz Attila: BCE Közgazdaságtani Doktori Iskola

Vázlat

- Többszempontú döntések
- Páros összehasonlítás mátrixok
- Korábbi empirikus vizsgálatok
- Céljaink, hipotéziseink, kérdéseink

Példák többszempontú döntési feladatokra:

- szegedi villamostender és trolitender
- A 4-es metró nyomvonal-változatainak összehasonlító vizsgálata
- környezeti hatástanulmányok

A többszempontú döntési problémák jellemzői:

- A szempontok sokszor egymásnak ellentmondóak
- Nincs (matematikai értelemben vett) egyetlen legjobb megoldás
- Szubjektív tényezők szerepeltetése
- Csoportos döntéshozatal

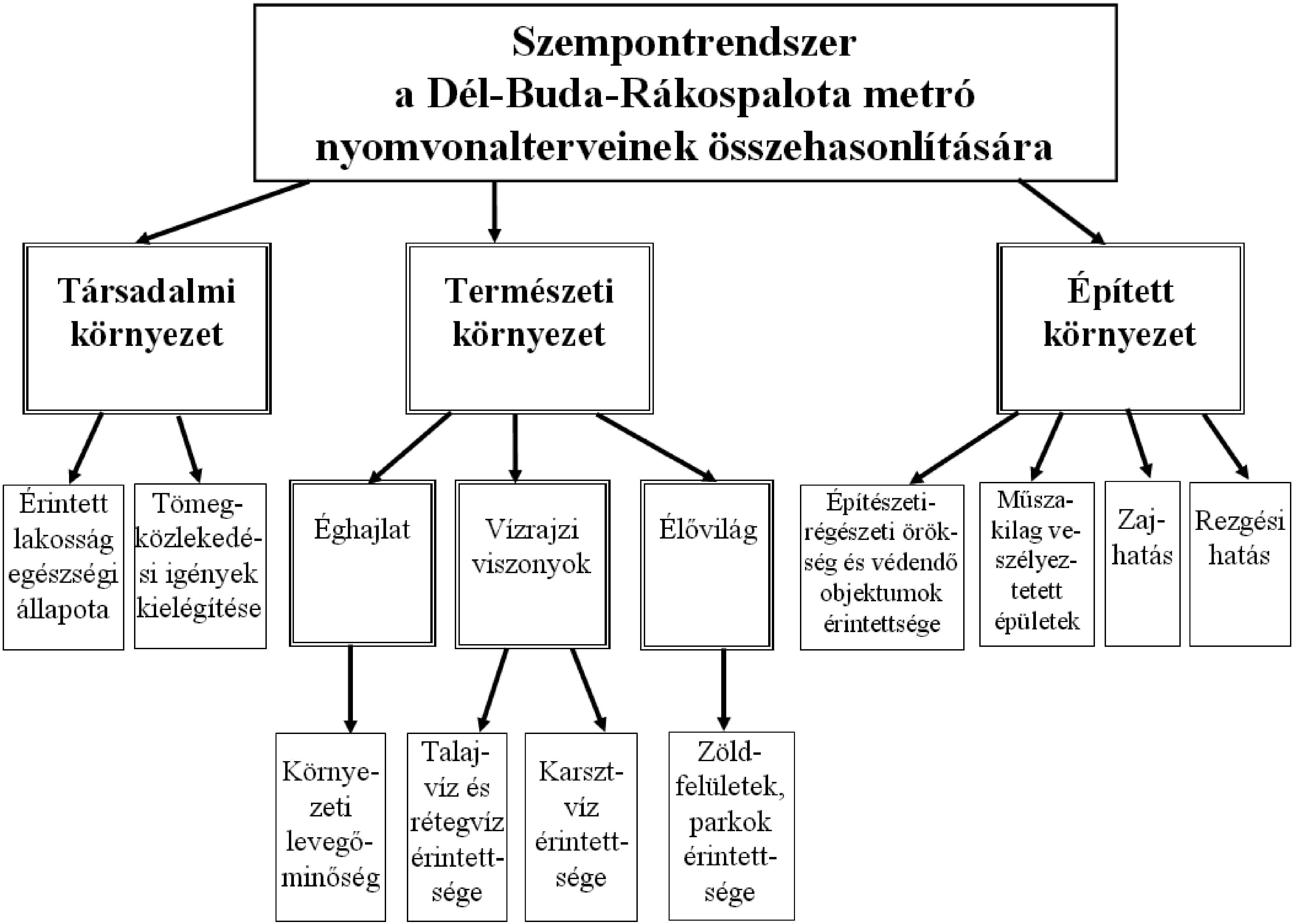
A döntési feladat célja:

- adott alternatívák közül
- adott szempontoknak

összességében legjobban megfelelő legjobb alternatíva kiválasztása vagy az alternatívák rangsorolása.

A megoldáshoz szükség van

- a szempontsúlyokra, és
- az alternatívák szempontok szerinti értékelésére.


Szempontrendszer
a Dél-Buda-Rákospalota metró
nyomvonalterveinek összehasonlítására
Társadalmi környezet
Természeti környezet
Épített környezet
Érintett lakosság egészségi állapota
Tömeg-közlekedé-si igények kielégítése
Éghajlat
Vízrajzi viszonyok
Élővilág
Építészeti-régészeti örök-ség és védendő objektumok érintettsége
Műsza-kilag ve-szélyez-tetett épületek
Zaj-hatás
Rezgési hatás
Környe-zeti levegő-minőség
Talaj-víz és rétegvíz érintett-sége
Karszt-víz érintett-sége
Zöld-felületek, parkok érintett-sége

Páros összehasonlítások

- Condorcet szavazási modellje (1780)
- Thorndike, Thurstone (1920, 1927)
- Guilford (1936)
- Churchman-Ackoff (1957)
- Saaty (1980)

Tegyük fel egy pillanatra, hogy a döntéshozó ismeri a $w_1, w_2, \ldots, w_n$ szempontsúlyokat. Az

$$x_{ij} := \frac{w_i}{w_j}$$

szabályt alkalmazva minden i, j indexpárra írjuk fel az alábbi négyzetes mátrixot:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} & \ldots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \frac{w_2}{w_3} & \ldots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & 1 & \ldots & \frac{w_3}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \frac{w_n}{w_3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \frac{w_2}{w_3} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & 1 & \dots & \frac{w_3}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \frac{w_n}{w_3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor minden $i, j, k = 1, \dots, n$ indexre

$$\begin{aligned} x_{ij} &> 0, \\ x_{ij} &= \frac{1}{x_{ji}}, \\ x_{ij}x_{jk} &= x_{ik}. \end{aligned}$$

Az x_{ij} elem megmutatja, hogy az i-edik szempont hányszor fontosabb a j-edik szempontnál.

A továbbiakban feltesszük, hogy a döntéshozó nem ismeri számszerűen a $w_1, w_2, \dots, w_n$ szempontsúlyokat.

A páros összehasonlítás mátrix ekkor is felírható, ha a döntéshozó meg tudja válaszolni a

Hányszor fontosabb az i-edik szempont a j-edik szempontnál?

típusú kérdéseket minden i, j pár esetén:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $i, j = 1, \dots, n-$re

$$\begin{aligned} a_{ij} &> 0, \\ a_{ij} &= \frac{1}{a_{ji}}. \end{aligned}$$

A feladat: a fenti $\mathbf{A}$ páros összehasonlítás mátrix ismeretében a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n_+$ súlyvektor meghatározása vagy legalábbis közelítése.

Adott

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ismeretében keressük a $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{R}^+$ változók azon értékeit, amelyre az

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \frac{w_2}{w_3} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & 1 & \dots & \frac{w_3}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \frac{w_n}{w_3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

mátrix *közel van* a döntéshozó által kitöltött $\mathbf{A}$ mátrixhoz.

A feladatnak számos matematikai modellje és megoldása létezik, távolságminimalizálók és nem távolságminimalizálók egyaránt.

A páronként összehasonlítandó objektumok lehetnek:

- Szempontok fontossága (szempontsúlyok)
- Alternatívák értékelése adott szempont szerint
- Döntéshozói szavazóerők (kompetenciasúlyok)
- Események szubjektív valószínűsége
- ...

Hasonlítsa össze az A és B elemeket!
Melyik tetszik jobban?
Hányszor jobban tetszik?

Arányskála

1 - ugyanannyira tetszik
3 - mérsékelten jobban tetszik
5 - sokkal jobban tetszik
7 - nagyon sokkal jobban tetszik
9 - rendkívüli mértékben jobban tetszik

Köztes értékek is felhasználhatók, pl. 2 vagy 1.5

Empirikus vizsgálatok

A páros összehasonlítás mátrixok témájában ezres nagyságrendű cikk született.

Ezek közül 10-15 foglalkozik a valós szituációkból származó mátrixok vizsgálatával.

Példa empirikus vizsgálatra

Gass és Standard (2002) kimutatták, hogy ha az 1-3-5-7-9 módon mutatjuk be az arányskálát, akkor a döntéshozók által beírt páratlan értékek gyakorisága 1.5-2-szer nagyobb, mint a párosaké.

Poesz Attila (2008) is kimutatta a fenti jelenséget egy olyan mátrixokból álló mintán, amelyek valós problémákból származnak és tudományos folyóiratokban esettanulmányként publikált dolgozatokban szerepelnek.

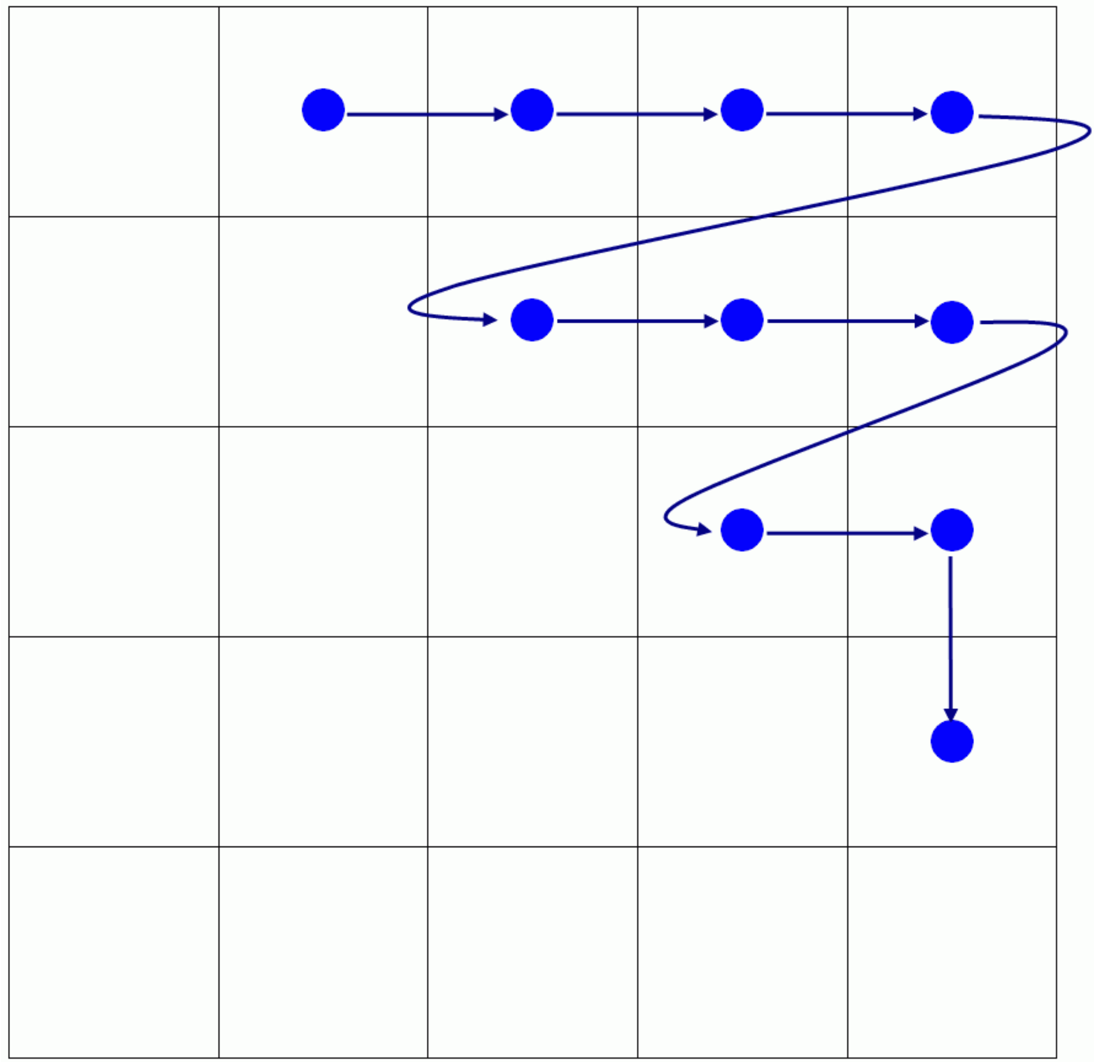
Saját kísérleteink

2009 őszén kezdtük el felépíteni a kísérleteket, behatárolni a vizsgálandó kérdéseket.

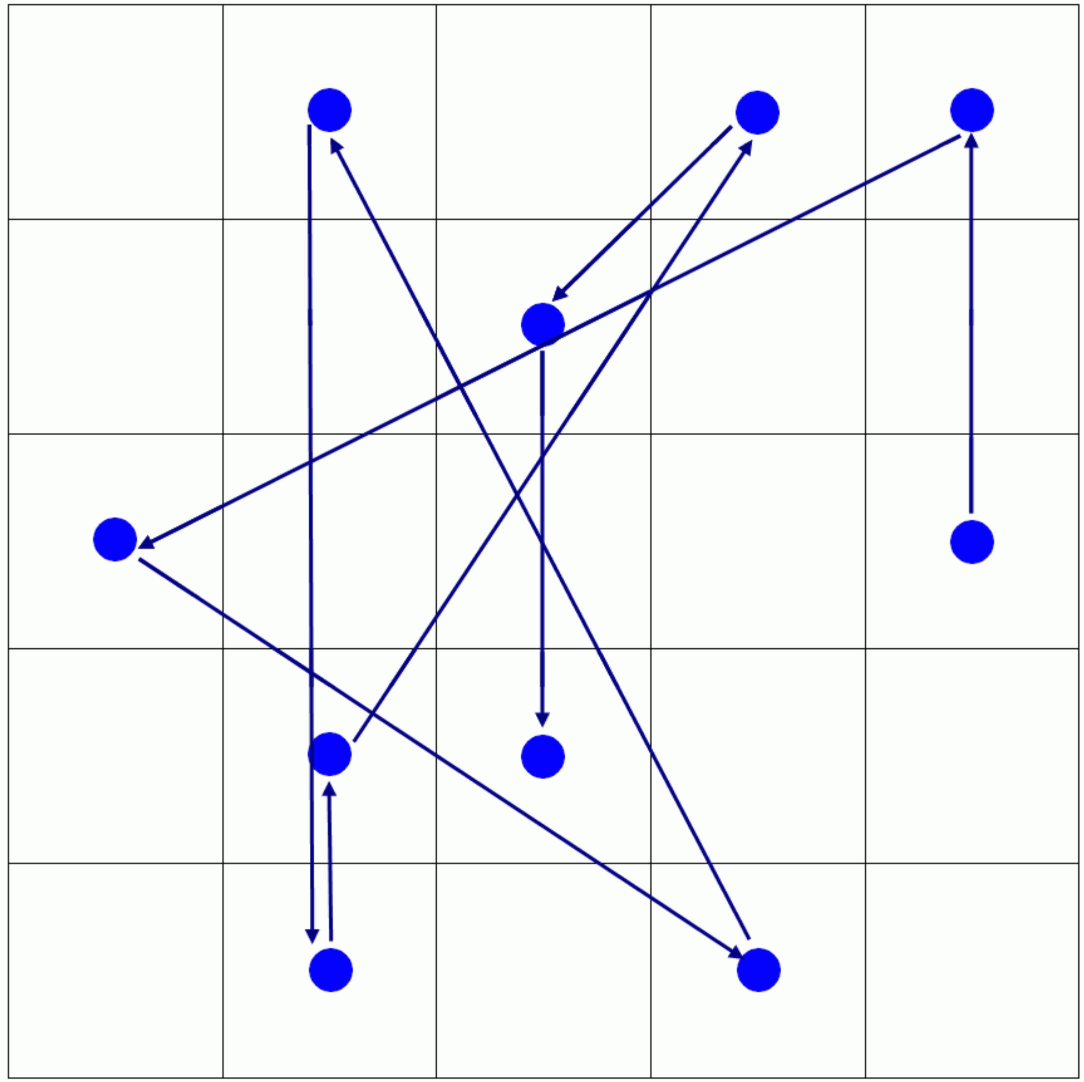
A kérdőíveket leteszteltük, az éles kísérleteket a jövő héten kezdjük.

Kérdéseink, hipotéziseink

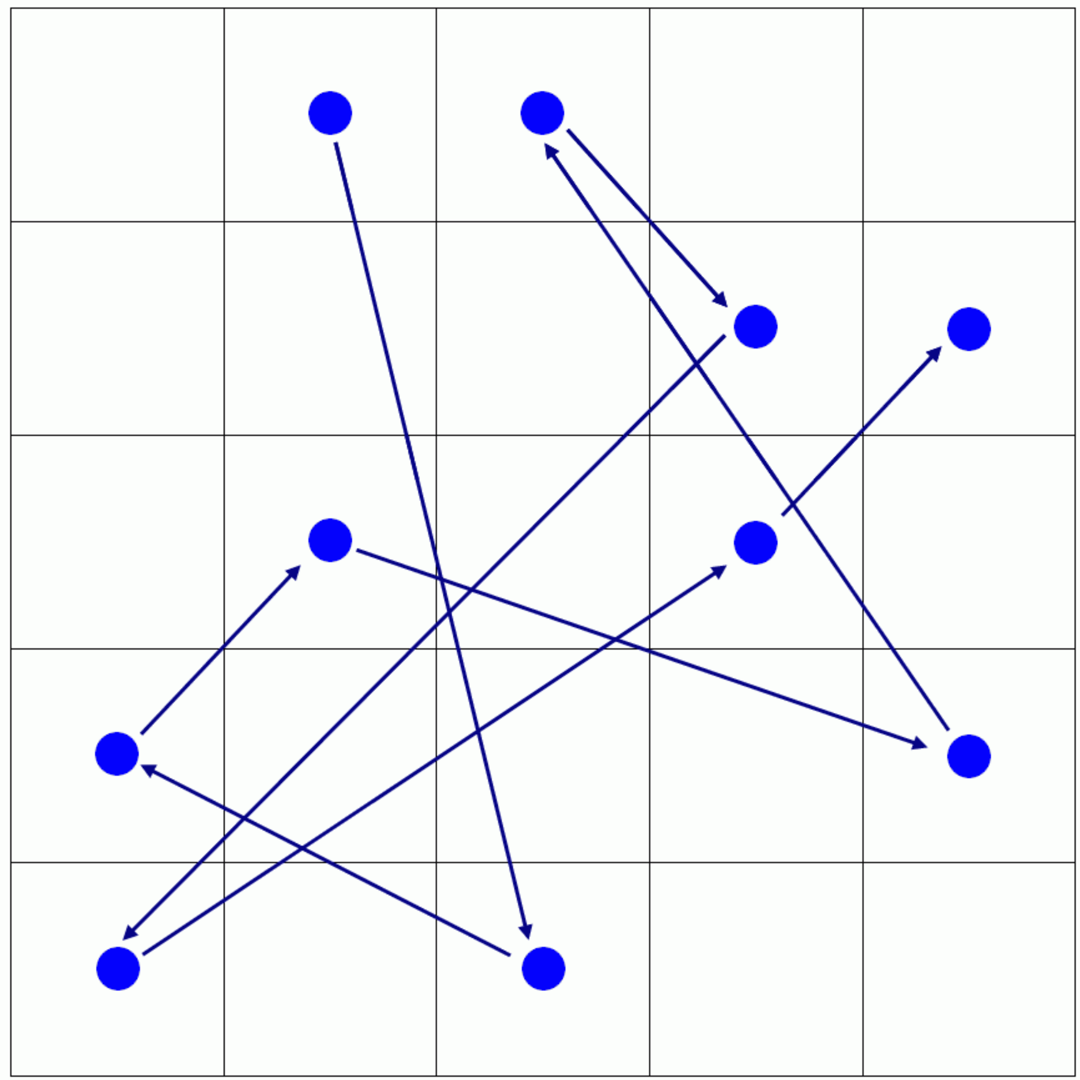
- a páros összehasonlítások sorrendjének hatása
- a feladat objektív-szubjektív jellege
- a mátrix méretének (= az összehasonlítandó elemek számának) szerepe



$12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 23 \quad 24 \quad 25 \quad 34 \quad 35 \quad 45$



35 15 31 45 12 52 42 14 23 43



12 53 41 32 45 13 24 51 34 25

Amiről ma nem volt szó

- a kísérleteink eredményei
- a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájának mérése
- nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok

Köszönöm a figyelmet.

bozoki@sztaki.hu

http://www.sztaki.hu/$\sim$bozoki