### Permutáció, mint bijektív függvény: $f: H \to H$

### Jelölések: $S_X, S_n$.

$S_X$: $X$-ben az összes permutáció
$S_n$: $\{1,2,\dots,n\}$ összes permutációjának halmaza

### Ciklusfelbontás, egyértelműség.

**T:** Minden permutáció $S_n$-ben előáll diszjunkt ciklusok szorzataként.
Ez egyértelmű a ciklusok sorrendjétől és a cikluson belüli ciklikus sorrendtől eltekintve.
**B:** Az injektivitás miatt mindig ugyanazokat a ciklusokat kapom.

### Inverzió.

**D:** 2 elem inverzióban van, ha sorrendjük megváltozott az eredetihez képest.

### Permutáció paritása.

**D:** Egy permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Egy permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.
**P:** $(1,2,4) = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{matrix}$ páros: 4 db inverzió
$(i, i+1)$ páratlan: inverziók száma 1.
$(i, j)$ páratlan, mert $i$ és $j$ ugyanazokkal lesz inverzióban, plusz egymással

**T:** Ha $\Pi$ előáll $n$ db csere szorzataként, akkor $\Pi$ paritása $n$
**B:** Ha egy permutációt megszorzok egy cserével, akkor a paritása megváltozik.
$\Pi = (\_,\_),(\_,\_),(\_,\_)$
$ptlan, ps, ptlan$
**P:** $n$ hosszú ciklus előáll $n-1$ db csere szorzataként $\to$ $n-1$ paritása $=$ ciklus paritása
Tehát páros hosszú ciklus páratlan permutáció

| | ps | ptlan |
|---|---|---|
| ps | ps | ptlan |
| ptlan | ptlan | ps |

### Kettes ciklus: csere vagy transzpozíció.

**T:** Minden permutáció előáll kettes ciklusok = cserék = transzpozíciók szorzataként.
**B:** Elejétől kezdve töltöm fel a helyes elemekkel.

### Transzpozíció paritása.

Minden csere előjele $-1$ $\to$ minden transzpozíció paritása páratlan.

### Permutáció paritása értelmes, leolvasható a ciklusszerkezetből.

**T:** Minden permutáció előáll kettes ciklusok = cserék = transzpozíciók szorzataként.

### Permutáció rendje, rend leolvasása a ciklusszerkezetből.

**D:** Egy $\Pi$ permutációnak a rendje $o(\Pi)$ a legkisebb olyan szám, ahányadikra emelve identitást kapunk.

- $o(\Pi) = n$
- $\Pi$-nek $n$ különböző hatványa van
- $\Pi^k = \Pi^l \Leftrightarrow k \equiv l \ (n)$
- $\Pi^t = id \ \Leftrightarrow n|t$

**P:** $o(a_1, a_2, \dots, a_n) = n$
$o(\Pi) =$ diszjunkt ciklusok hosszának legkisebb közös többszöröse [összes prím a legmagasabb hatványon]

### A cserék generálják $S_n$-et.

$S_n = \langle (1,i) \rangle$ merT: $(i,j) = (1,i)(1,j)(1,i)$

$S_n = \langle (i,i+1) \rangle$ merT: $(1,i) = (i,i-1)(i-1,i-2)\dots(2,1)(2,3)(3,4)\dots(i-1,i)$

## Determináns.

$$\det A = |A| = \sum_{\Pi \in S_n} (-1)^{\mathrm{sg}\,\Pi} \cdot a_{1\Pi_1} \cdot a_{2\Pi_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\Pi_n}$$

## Bonyolult definíció.

**T:** Ha 2 mátrix csak az első sorban különbözik, akkor a determinánsok összege megegyezik annak a mátrixnak a determinánsával, ahol az első sor az összeg, a többi marad.

**B:** $\left|\begin{pmatrix} a \\ \ldots \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} b \\ \ldots \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a+b \\ \ldots \end{pmatrix}\right|$

$$\sum (-1)^{sig\Pi} \cdot a_{1\Pi_1} \cdot c_{2\Pi_2} \cdot \ldots \cdot c_{n\Pi_n} + \sum (-1)^{sig\Pi} \cdot b_{1\Pi_1} \cdot c_{2\Pi_2} \cdot \ldots \cdot c_{n\Pi_n} =$$
$$= \sum (-1)^{sig\Pi} \cdot \left(a_{1\Pi_1} + b_{1\Pi_1}\right) \cdot c_{2\Pi_2} \cdot \ldots \cdot c_{n\Pi_n}$$

## Sorműveletek hatása a determinánsra.

1 **T:** Ha egy mátrixnak van egy csupa 0 sora, akkor $\det A = 0$.
**B:** ∀ tényezőben ∀ sorból szerepel elem

2 **T:** Ha 2 sort megcserélek, $(-1)$-szeresére változik a determináns.
**B:** $\sum (-1)^{sig(i,j)\cdot\Pi} \cdot a_{1\Pi_1} \cdot a_{2\Pi_2} \cdot \ldots \cdot a_{i\Pi_i} \cdot \ldots \cdot a_{j\Pi_j} \cdot \ldots \cdot a_{n\Pi_n} \Longrightarrow$ ugyanazok a tényezők, más előjellel

3 **T:** Ha egy mátrixnak van két azonos sora, akkor $\det A = 0$.
**B1:** $(-1)^{sig\Pi} \cdot a_{1\Pi_1} \cdot a_{2\Pi_2} \cdot \ldots \cdot a_{i\Pi_i} \cdot \ldots \cdot a_{j\Pi_j} \cdot \ldots \cdot a_{n\Pi_n}$

$\sigma = (i,j) \cdot \Pi \Longrightarrow sig\ \sigma = -1 \cdot sig\ \Pi$

$(-1)^{sig\sigma} \cdot a_{1\Pi_1} \cdot a_{2\Pi_2} \cdot \ldots \cdot a_{i\Pi_j} \cdot \ldots \cdot a_{j\Pi_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\Pi_n}$

$\Longrightarrow$ Ellenkező előjelűek $\Longrightarrow$ kiesnek

**B2:** Ha a két sort kicserélem, a determináns $(-1)$-szeresére változik.
A mátrix ugyanaz maradt $\Longrightarrow$ det ugyanaz marad $\Longrightarrow$ $\det A = -\det A = 0$

4 **T:** Ha az $i.$ sort $\lambda$-val szorzom, a determináns $\lambda$-szorosára változik.
**B:** ∀ tényező $\lambda$-val szorzódik.

5 **T:** Ha egy sorhoz hozzáadom egy másik sor $\lambda$-szorosát, a determináns értéke nem változik.

**B:** $\begin{pmatrix} \ldots \\ i \\ \ldots \\ j+\lambda i \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ i \\ \ldots \\ j \\ \ldots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \lambda i \\ \ldots \end{pmatrix} = \det A + 0$

**P:** $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & 0 \\ \ldots & a_{22} & \ldots \\ vmi & \ldots & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & vmi \\ \ldots & a_{22} & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{33} \end{vmatrix} = \prod a_{ii}$

## Kifejtési tétel.

**T:** $\det A = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$

ahol $A_{ij}$: $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix, melyből az $i.$ sort és a $j.$ oszlopot elhagyom.

## Tridiagonális Fibonacci-determináns kiszámolása

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & & & & \\ -1 & 1 & 1 & \ldots & & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & & \ldots & -1 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} D_1 = 1 \\ D_2 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \text{Kifejtési tétel első sor szerinT:}$$

$$D_n = 1 \cdot D_{n-1} - 1 \cdot (-1) \cdot D_{n-2}$$

## Vektortér definíciója, példák pl.: halmazok $Z_2$ fölötT: az összeadás a szimmetrikus differencia, stb. Nem példák is.

Legyen adott $V$ nem üres halmaz, egy $T$ test. $V$ vektortér $T$ felett, ha: 3

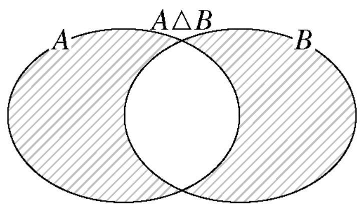
- Létezik egy $+$ művelet, amelyre: $\forall u, v$: $u + v \in V$ (összeadásra zárt)
  - $u + v = v + u$ (kommutatív)
  - $(u + v) + z = u + (v + z)$ (asszociatív)
  - $\exists 0$: $v + 0 = 0 + v = v$ (létezik nullelem)
  - $\forall v\ \exists v'$: $v + v' = v' + v = 0$ (létezik az ellentett)
- Létezik egy $\cdot$ művelet, amelyre: $\forall \lambda \in T$, $\forall v \in V$: $\exists \lambda v \in V$ (szorzásra is zárt)
  - $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ (disztributív)
  - $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ (disztributív)
  - $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ (asszociatív)
  - $1v = v$ (Létezik egységelem)

**P:** sík vektorai, szokásos $+$, $\mathbb{R}$, szokásos $\cdot$

**P:** sík vektorai, szokásos $+$, $\mathbb{Q}$, szokásos $\cdot$

**P:** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pontonkénti összeadás: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ és $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

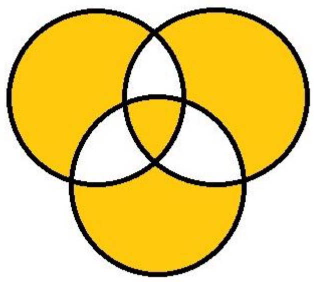
**NemP:** nem folytonos függvények: nem zárt az +-ra




**P:** $\mathbb{R}, +, \mathbb{R}, \cdot$

**P:** oszlopvektorok, koordinátánkénti $+$, $\lambda \cdot$

**P:** $V = \{H | H \subset S\}$ ($2^n$ db), szimmetrikus differencia: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$T = \mathbb{Z}_2$, $\lambda \cdot A = \begin{cases} A \text{ } ha \text{ } \lambda = 1 \\ \emptyset \text{ } ha \text{ } \lambda = 0 \end{cases}$
kommutatív, asszociatív, $0 = \emptyset$, minden halmaznak önmaga az ellentettje



## Altér, altér ellenőrzése

**D:** $W \le V$: $W \subseteq V$: $W$ altér, ha vektortér ugyanazokra a műveletekre
**P:** Sík $\le$ Tér, folyt. fv $\le$ fv.
**P:** Origón átmenő egyenes vektorai

**T:** $W \le V \Leftrightarrow$ zárt a műveletekre, $\exists 0, \exists v'$ $\forall v$-hez
**B:** egyenlőséget tartó axiómák automatikusan teljesülnek
$\exists 0$, mert: $0 = 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v = 0 + 0 = 0$
$0 \cdot v + 0 \cdot v' = 0 \cdot v + 0 \cdot v + 0 \cdot v'$
$0 = 0 \cdot v + 0 = 0 \cdot v$
$\exists v'$, mert: $v' = -v = (-1) \cdot v$
$v + (-1)v = (1 - 1)v = 0v = 0$
$v'$ egyértelmű, mert tfh: $0 = v + v' = v + v''$. Ekkor:
$v' + v + v' = v + v'' + v' \Leftrightarrow v' + 0 = v'' + 0 \Leftrightarrow v' = v''$

## Akárhány altér metszete altér.

**T:** Alterek metszete altér.

**B:** Kell: $\bigcap W_i$ zárt $+, \cdot$ $\lambda$-ra
Ha $v, u \in \bigcap W_i \Longrightarrow v, u \in W_i$ $\forall i$-re $\Longrightarrow$ $v + u \in W_i$ $\forall i$-re $\Longrightarrow$ $v + u \in \bigcap W_i$
Ha $v \in \bigcap W_i \Longrightarrow v \in W_i$ $\forall i$-re $\Longrightarrow \lambda \cdot v \in W_i$ $\forall i$-re $\Longrightarrow$ $\lambda \cdot v \in \bigcap W_i$

Generált altér: $\langle S\rangle = \bigcap_{S\subseteq W} W$

**D:** Legyen $S \subset V$. $\langle S\rangle$: az $S$ által generált altér a legszűkebb olyan altér, ami tartalmazza $S$-t.

A definíció értelmes.

$\langle S\rangle = \bigcap_{S\subseteq W} W \Longrightarrow S \subseteq \bigcap_{S\subseteq W} W \Longrightarrow S$ *altér*, mert alterek metszete.
A *legszűkebb* ilyen, mert saját maga is részt vesz a metszetben.

Generált altér leírása lineáris kombinációkkal.

$$\langle S\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i \middle|\, a_i \in S\right\}$$

**B:** $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i |\, a_i \in S\} \subset \langle S\rangle$, mert ha $a_i \in \langle S\rangle \Longrightarrow \lambda_i \cdot a_i \in \langle S\rangle \Longrightarrow \sum \lambda_i \cdot a_i \in \langle S\rangle$
$\langle S\rangle \subset \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i |\, a_i \in S\}$, mert elég: $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i |\, a_i \in S\}$ altér.
+-ra zárT: $\sum \lambda_i \cdot a_i + \sum \mu_i \cdot a_i = \sum(\lambda_i + \mu_i) \cdot a_i$
$\cdot\, \mu$-re zárT: $\mu \cdot \sum \lambda_i \cdot a_i = \sum(\mu \cdot \lambda_i) \cdot a_i$

Függetlenség, összefüggőség véges és végtelen vektorrendszerekre.

**D:** $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\sum \lambda_i \cdot a_i = 0 \Longrightarrow \forall \lambda_i = 0$.
**EllenP:** $a = \lambda b \Longrightarrow a + (-\lambda)b = 0$.

**D:** Végtelen sok vektor lineáris függetlenségén azt értjük, hogy közülük bármely véges sok lineárisan független.

**D:** $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorok lineárisan összefüggők, ha nem függetlenlek.

Független rendszer része független.

**T:** Független halmaz része független. $S$ független és $S' \subset S \;\Rightarrow S'$ független.

**B:** Indirekt. Tfh. $S$ független és $S'$ összefüggő.
Ekkor $\exists a_i \in S'$, hogy $\sum \lambda_i a_i = 0$, ahol nem $\forall \lambda_i = 0$.
$S$-ben még vannak vektorok: $b_i$.
$\sum \lambda_i a_i + \sum 0 \cdot b_j = 0$, ahol nem $\forall \lambda_i = 0 \Rightarrow S$ összefüggő. ↯

Összefüggőhöz hozzáveszünk, összefüggő marad.

**T:** Ha $S'$ összefüggő és $S' \subset S \;\Rightarrow S$ összefüggő

S összefüggő ⇔ van olyan vektor, amely kifejezhető a többivel.

$S$ ftl, $b$ nem függ $S$-től, akkor $S \cup \{b\}$ is ftl.

**D:** $a_i \in S \leq V$. $b$ függ $S$-től, ha $b = \sum \lambda_i \cdot a_i \Longrightarrow v \in \langle S\rangle$

**T:** $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha egyik $a_i$ sem függ a többitől.

**B:** ♣ Ha $a_1 = \sum_2^n \lambda_i \cdot a_i \;\Rightarrow 0 = -a_1 + \sum_2^n \lambda_i \cdot a_i \Rightarrow$ összefüggőek
♣ Ha összefüggők $\Rightarrow 0 = \sum_1^n \lambda_i \cdot a_i \;\; \exists i\colon \lambda_i \neq 0$
$\Rightarrow -\lambda_i \cdot a_i = \lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_{i-1} \cdot a_{i-1} + \lambda_{i+1} \cdot a_{i+1} + \dots + \lambda_n \cdot a_n$
$\Rightarrow a_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \cdot a_1 + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \cdot a_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \cdot a_{i+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \cdot a_n \Rightarrow a_i$ kifejezhető $\Rightarrow$ összefüggőek

**D:** $S$ generátorrendszer $V$-ben, ha $\langle S\rangle = V$.

**T:** Ha $g_1, g_2, \dots, g_k$ véges generátorrendszer $V$-ben, és $f_1, f_2, \dots, f_n$ függetlenek $V$-ben, akkor $n \leq k$.

**B:** A kicserélési tételt alkalmazva: cseréljük ki az összes $f_i$-t!.
Ekkor a függetlenség miatt nem lehet köztük 2 egyenlő. $\Rightarrow n \leq k$.

## Kicserélési tétel.

**T:** Ha $g_1, g_2, \dots, g_k$ véges generátorrendszer $V$-ben, és $f_1, f_2, \dots, f_n$ függetlenek $V$-ben, akkor $\forall f_i$-hez $\exists g_j$, hogy $f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, g_j, f_{i+1}, \dots, f_n$ független. 4

**B:** Indirekt. Tfh. $\exists i$ $\forall j$-re $f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, g_j, f_{i+1}, \dots, f_n$ összefüggő.
$0 = \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \dots + \lambda_{i-1} \cdot f_{i-1} + \mu \cdot g_j + \lambda_{i+1} \cdot f_{i+1}, \dots + \lambda_n \cdot f_n$, ahol $\mu \neq 0$ vagy $\lambda_i \neq 0$.
$\mu \neq 0$, merT: $f_i$-k függetlenek, és ha $\mu = 0$, akkor $\lambda_i = 0$ $\forall i$-re. ↯
$-g_j = \frac{\lambda_1}{\mu} \cdot f_1 + \frac{\lambda_2}{\mu} \cdot f_2 + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{\mu} \cdot f_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{\mu} \cdot f_{i+1}, \dots + \frac{\lambda_n}{\mu} \cdot f_n$ $\forall j$-re
$\Rightarrow$ $g_j \in \langle f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n \rangle$ $\forall j-\text{re} \Rightarrow \langle g_j \rangle = V \leq \langle f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n \rangle$
$\Rightarrow f_i \in \langle f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n \rangle$
$\Rightarrow f_i = \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \dots + \lambda_{i-1} \cdot f_{i-1} + \mu \cdot g_j + \lambda_{i+1} \cdot f_{i+1}, \dots + \lambda_n \cdot f_n \Rightarrow f_i$-k összefüggők ↯

## Bázis, dimenzió létezése.

**D:** Bázis = független generátorrendszer

**D:** dim $V$ = bázis elemszáma

**T:** $v_1, \dots, v_n$ bázis $V$-ben $\Leftrightarrow V$ $\forall$ vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként.

**B:** ♣ ⇐ ✓

♣ ⇒: Tfh. $\exists v$, ami kétféleképpen is előáll.
$\sum \lambda_i \cdot v_i = \sum \mu_i \cdot v_i \Leftrightarrow \qquad \sum (\lambda_i - \mu_i) \cdot v_i = 0$
Mivel $v_i$-k függetlenek $\Rightarrow \lambda_i - \mu_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i$

## Minden maximális független rendszer bázis,

**T:** Ha $S = \{u_1, \dots u_n\}$ maximális független rendszer, akkor bázis.

**B:** Kell: generátorrendszer. Biz. indirekt. Tfh. $\langle S \rangle \neq V \Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \langle S \rangle$.
$u_1, \dots u_n, v$ öf. $\Rightarrow 0 = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n + \mu \cdot v$, ahol $\mu \neq 0$ vagy $\lambda_i \neq 0$.
$\mu \neq 0$, merT: $u_i$-k függetlenek, és ha $\mu = 0$, akkor $\lambda_i = 0$ $\forall i$-re. ↯
$-v = \frac{\lambda_1}{\mu} \cdot u_1 + \frac{\lambda_2}{\mu} \cdot u_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{\mu} \cdot u_n \Rightarrow v \in \langle S \rangle$ ↯

## Minden minimális generátorrendszer bázis,

**T:** Ha $S = \{u_1, \dots u_n\}$ minimális generátorrendszer, akkor bázis.

**B:** Kell: független. Biz. indirekt. Tfh. $S = \{u_1, \dots u_n\}$ öf.
$0 = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n$, ahol $\exists \lambda_i \neq 0$.
$-u_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \cdot u_1 + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \cdot u_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \cdot u_{i+1} \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \cdot u_n \Rightarrow u_i$ nélkül is gen. rendszer ↯

## Minden független rendszer kiegészíthető bázissá,

**T:** Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

**B:** Tfh. $u_1, \dots u_n$ maximális független rendszer. Ha nem, akkor hozzávehetek még néhány vektort, és még mindig független lesz. Stb… (Legfeljebb a dimenziószámig.)

## Minden generátorrendszerből kiválasztható bázis,

**T:** Ha $u_1, \dots u_n$ generátorrendszer, akkor el lehet hagyni néhány vektort úgy, hogy bázist kapjak.

**B:** Tfh. $u_1, \dots u_n$ minimáilis generátorrendszer. Ha nem, akkor elhagyhatok néhány vektort. Stb…

## Minden bázis ugyanakkora.

**T:** Két különböző bázis elemszáma egyenlő. Ha $l_1, \dots l_k$ és $h_1, \dots h_n$ is bázis, akkor $k = n$.

**B:** Az előző állítás miatt $n \leq k$ és $k \leq n \Rightarrow k = n$. 4

**P:** Sík: bármely 2 nem párhuzamos vektor

**P:** $T^n$-ben $n$ db vektor.

**P:** $\mathbb{R}^2$-ben $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$ bázis. $\mathbb{R}^2$-ben $\binom{1}{1}, \binom{0}{1}$ is bázis

## Lineáris leképezés,

**D:** $\varphi: V_1 \to V_2$ függvény, ahol:

- $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)\ \forall u, v \in V_1$-re
- $\lambda \cdot \varphi(v) = \varphi(\lambda \cdot v)\ \forall v \in V_1$-re

**D:** Lineáris transzformáció: $V_1 = V_2$

**P:** $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$, $\varphi =\cdot 2$
$2 \cdot (u+v) = 2u + 2v$ és $2 \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot 2 \cdot v$

**P:** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\alpha$ szögű origó körüli elforgatás

**P:** Legfeljebb n-ed fokú polinomok

**P:** Nyírás: $\binom{a}{b} \to \binom{a}{b + \lambda \cdot a}$
$+, \cdot\lambda$ tartó: $\binom{\mu a}{\mu b} \to \binom{\mu a}{\mu b + \mu \cdot \lambda \cdot a} = \mu \cdot \binom{a}{b + \lambda \cdot a}$

## Magtér, képtér (ezek alterek),

**D:** $Ker\ \varphi = \{v \in V_1\ és\ \varphi(v) = 0\}$
$Im\ \varphi = \{\varphi(v) | v \in V_1\}$

**P:** deriválás
$Ker\ \varphi = \{c\}$ és $Im\ \varphi = \{T_{[x]}\}$

**T:** $\varphi(0) = 0$
**B:** $\varphi(0 \cdot 0) = 0 \cdot \varphi(0) \Longrightarrow \varphi(0) = 0$

**T:** $Ker\ \varphi \leq V_1$

**B:** ♣ 0 benne van
♣ +-ra zárT: $u, v \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in Ker\varphi$
♣ $\cdot\lambda$-ra zárT: $\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda \cdot \varphi(v) \in Ker\varphi$

**T:** $Im\ \ \varphi \leq V_2$

**B:** ♣ 0 benne van
♣ +-ra zárT: $u, v \in Im\varphi \Rightarrow \exists u_1, v_1 \in V_1 : \varphi(u_1) = u, \varphi(v_1) = v$
$\varphi(u_1 + v_1) = \varphi(u_1) + \varphi(v_1) = u + v \in Im\varphi$
♣ $\cdot\lambda$-ra zárT: $u \in Im\varphi \Rightarrow \exists u_1 \in V_1 : \varphi(u_1) = u$
$\varphi(\lambda \cdot u_1) = \lambda \cdot \varphi(u_1) = \lambda \cdot u \in Im\varphi$

## Dimenzió tétel,

**T:** $\dim Ker\varphi + \dim Im\varphi = \dim V_1$

**B:** $dimV_1 = n$ és $\dim Ker\varphi = s$ és $\langle b_1, \dots, b_s \rangle = Ker\varphi$ és $\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V_1$.
Kell: $\varphi(b_{s+1}), \dots, \varphi(b_n)$ bázisa $Im\ \varphi$-nek.
♣ Generátorrendszer: $\varphi(u) \in Im\varphi$. Ekkor $u = \sum_1^n \lambda_i \cdot b_i$.

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_1^n \lambda_i \cdot b_i\right) = \sum_1^n \lambda_i \cdot \varphi(b_i) = \sum_{s+1}^n \lambda_i \cdot \varphi(b_i)$$

♣ Függetlenek:

$$0 = \sum_{s+1}^n \lambda_i \cdot \varphi(b_i) = \varphi\left(\sum_{s+1}^n \lambda_i \cdot b_i\right) \Rightarrow u = \sum_{s+1}^n \lambda_i \cdot b_i \in Ker\varphi \Rightarrow u = \sum_1^s \lambda_i \cdot b_i \Rightarrow \forall \lambda_i = 0$$

Előírhatósági tétel,

**T:** Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázis $V_1$-ben és $u_1, \dots, u_n$ bázis $V_2$-ben.
$\exists!\, \varphi: V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, amire $\varphi(v_i) = u_i$.

**B:** ♣ Egyértelműség:

Tfh. $\varphi$ és $\gamma$ is ilyen. Ekkor: $u_i = \varphi(v_i) = \gamma(v_i)$.

$v = \sum \lambda_i \cdot v_i \in V_1$. Ekkor $\varphi(v) = \varphi(\sum \lambda_i \cdot v_i) = \sum \lambda_i \cdot \varphi(v_i) = \sum \lambda_i \cdot \gamma(v_i) = \gamma(\sum \lambda_i \cdot v_i) = \gamma(v)$

♣ Létezés:

+-tartó, merT: $\varphi(u + v) = \varphi(\sum \lambda_i \cdot v_i + \sum \mu_i \cdot v_i) = \varphi(\sum(\lambda_i + \mu_i) \cdot v_i) = \sum\big((\lambda_i + \mu_i) \cdot \varphi(v_i)\big)$

$\varphi(u) + \varphi(v) = \sum \lambda_i \cdot \varphi(v_i) + \sum \mu_i \cdot \varphi(v_i) = \sum\big((\lambda_i + \mu_i) \cdot \varphi(v_i)\big)$

$\cdot\, \lambda$-tartó, merT: $\varphi(\lambda \cdot v) = \varphi(\lambda \cdot \sum \lambda_i \cdot v_i) = \varphi(\sum \lambda \cdot \lambda_i \cdot v_i) = \sum \lambda \cdot \lambda_i \cdot \varphi(v_i)$

$\lambda \cdot \varphi(v) = \lambda \cdot \sum \lambda_i \cdot \varphi(v_i) = \sum \lambda \cdot \lambda_i \cdot \varphi(v_i)$

Összefüggő rendszer képe összefüggő, független ősképe független.

Vektortér izomorfizmus, az inverz is lineáris leképezés,

**D:** A $\varphi \in Hom\,(V_1, V_2)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű.
$V_1 \cong V_2$ izomorf vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

**P:** Inverz is lineáris leképezés

**B:** ♣ +-tartó, merT: $\exists!\, u_1\colon\ \varphi(u_1) = v_1$ és $\exists u_2\colon \varphi(u_2) = v_2$

$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$

$\varphi(\varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)) = v_1 + v_2 \qquad /\varphi^{-1}$

$\varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2) = \varphi^{-1}(v_1 + v_2)$

♣ $\cdot\,\lambda$-tartó, merT: $\varphi(u) = v$

$\varphi(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \varphi(u)$

$\varphi(\lambda \cdot \varphi^{-1}(v)) = \lambda \cdot v$

$\lambda \cdot \varphi^{-1}(v) = \varphi^{-1}(\lambda \cdot v)$

**P:** $dim\ V = n \Longrightarrow V \cong T^n$

Egyforma dimenziós vektorterek izomorfak.

$\dim V_1 = \dim V_2 \Longrightarrow V_1 \cong V_2$
**B:** bijekció

Műveletek leképezésekkel: skalárral való szorzás, összeadás, kompozíció (szorzás nincs).

$(\lambda \cdot \varphi)(v) = \lambda \cdot \varphi(v)$
$(\varphi + \gamma)(v) = \varphi(v) + \gamma(v)$
$\varphi \circ \gamma$ csak akkor létezik, ha $\varphi\colon V_1 \to V_2$ és $\gamma\colon V_2 \to V_3$.
Asszociatív: $(\varphi \circ \gamma)(v) = \varphi\big(\gamma(v)\big)$

$\mathrm{Hom}(V1, V2)$ vektortér, dimenziója $mn$.

**T:** $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ vektortér.

**B:** $(\varphi + \gamma)(v) = \varphi(v) + \gamma(v) = \gamma(v) + \varphi(v) = (\gamma + \varphi)(v)$

$\big((\varphi + \gamma) + \sigma\big)(v) = (\varphi + \gamma)(v) + \sigma(v) = \varphi(v) + \gamma(v) + \sigma(v) = \varphi(v) + (\gamma + \sigma)(v) = \big(\varphi + (\gamma + \sigma)\big)(v)$

$0 = 0$ transzformáció

ellentetT: $-\varphi$

$\big((\lambda + \mu) \cdot \varphi\big)(v) = (\lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \varphi)(v) = (\lambda \cdot \varphi)(v) + (\mu \cdot \varphi)(v) = \lambda \cdot \varphi(v) + \mu \cdot \varphi(v)$

$\big(\lambda \cdot (\varphi + \gamma)\big)(v) = \lambda \cdot \big(\varphi(v) + \gamma(v)\big) = \lambda \cdot \varphi(v) + \lambda \cdot \gamma(v) = (\lambda \cdot \varphi + \lambda \cdot \gamma)(v)$

$\big((\lambda \cdot \mu) \cdot \varphi\big)(v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \varphi(v) = \lambda \cdot \big(\mu \cdot \varphi(v)\big) = \big(\lambda \cdot (\mu \cdot \varphi)\big)\,(v)$

$1 = id$

**M:** Dimenziója: $m \cdot n$

Hom(V) gyűrű is.

**T:** $\mathrm{Hom}(V)$ gyűrű.

**B:** Kell: $\big(\varphi \circ (\gamma_1 + \gamma_2)\big)(v) = \big((\varphi \circ \gamma_1) + (\varphi \circ \gamma_2)\big)(v)$

$\varphi\big((\gamma_1 + \gamma_2)(v)\big) = \varphi\big(\gamma_1(v) + \gamma_2(v)\big) = \varphi \circ \gamma_1(v) + \varphi \circ \gamma_2(v) = (\varphi \circ \gamma_1)(v) + (\varphi \circ \gamma_2)(v) = \big((\varphi \circ \gamma_1) + (\varphi \circ \gamma_2)\big)(v)$

Vektor koordinátája,

**M:** Bázis: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\ v = \sum \lambda_i \cdot e_i \Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ koordináták.

**M:** Ha $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ \dots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ \dots \\ a_{2n} \end{pmatrix}$, ..., akkor $\varphi \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$

Leképezés mátrixa.

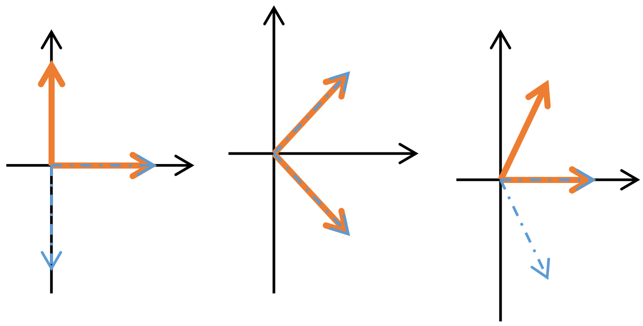
Rögzített bázisnál kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a mátrixokkal.

Példák: deriválás (több test fölött), tükrözés 3 bázisban, forgatás 2 bázisban, stb.

**P:** Deriválás

**P:** Tükrözés az $x$ tengelyre 3 bázisban:

- Bázis: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ Mátrix: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$
- Bázis: $45°$-os vektorok. Mátrix: $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$
- Bázis: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, 60°-os vektor Mátrix: $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$



**P:** Forgatás $60°$-kal 2 bázisban:

- Bázis: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ Mátrix: $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$
- Bázis: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha$ szögű vektor. Mátrix: $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

Sajátérték, sajátvektor, diagonalizálhatóság, karakterisztikus polinom.

7

**D:** Ha $\{v|\ Av = \lambda v\}$, akkor $v$ sajátvektor, $\lambda$ sajátérték.

**M:** Sajátértékkeresés:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot k(x)$$

$k(x)$ karakterisztikus polinom, gyökei a sajátértékek.

**M:** $\exists \alpha_1, \dots \alpha_{n^2}$, hogy $\alpha_{n^2} \cdot x^{n^2} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 I$-nak gyöke $A$.

**B:** $I, A, A^2, \dots, A^n, \dots, A^{n^2}$ lineárisan öf., mert $\dim T^{n\times n} = n^2$, de $n^2+1$ db mátrix.

$\implies \alpha_{n^2} \cdot A^{n^2} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$

**M:** *Sajátaltér*: A $\lambda$-hoz tartozó sajátvektorok $+\ 0$.

Polinom behelyettesítés mátrixba (vagy inkább fordítva). $f(x) = g(x)h(x)$-ből nem következik $f(A) = g(A)h(A)$, csak ha $g$ és $h$ együtthatói (lehetnek mátrixok is) felcserélhetőek $A$-val.

**M:** $f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow f(A) = g(A)h(A)$ csak akkor, ha $g$ és $h$ együtthatói felcserélhetők $A$-val.

Minimálpolinom, $m|f \iff f(A) = 0$.

**D:** Minimálpolinom: $m_a(x)$: a legkisebb fokú, 1 főegyütthatós polinom, amelynek gyöke a mátrix.

**T:** $f(A) = 0 \Leftrightarrow m(x)|f(x)$

**B:** $f(x) = m(x)\cdot q(x) + r(x)$

$f(A) = m(A)\cdot q(A) + r(A) \Rightarrow 0 = 0 + r(A) \Rightarrow r(A) = 0 \Rightarrow r(x) = 0$

A minimálpolinom osztja a karakterisztikus polinomot (nem biz).

**T:** *Cayley-Hamilton-tétel*: $m_A(x)|k_A(x)$

Mátrixok hasonlósága, diagonalizálhatóság fogalma.

**D:** Hasonló mátrixok: $A \sim B \Leftrightarrow x^{-1}Ax = B$

**D:** Lineáris transzformáció diagonalizálható, ha van „szép” bázis.

$A$ diagonalizálható, ha van olyan bázis, amiben $A$-t felírva diagonális alakú.

**M:** Van „szép” bázis, ha van sajátértékekből álló bázis.

**T:** $A$ diagonalizálható $\Leftrightarrow m_A(x)\ \forall$ gyöke egyszeres.

**T:** $A$ diagonalizálható $\Leftrightarrow\ \sum \dim(V_{\lambda_i}) = \dim V$

**T:** Ha $A\ \forall$ sajátértéke különböző, akkor $A$ diagonalizálható.

**T:** Ha $A$-nak $\exists\ n$ különböző sajátértéke, akkor $A$ diagonalizálható.

**Invertálhatóság:**

6

| $\varphi$ | $A$ |
|---|---|
| $\exists e^{-1}$ | $\exists A^{-1}$ $(\det A \neq 0)$ |
| $\dim Im\varphi = n$ | $r(A) = n$ |
| $\dim Ker\varphi = 0$ | $Ax = 0\ \exists!\ mo.$ |
| $\nexists \gamma : \varphi \circ \gamma = 0$<br>$\nexists \gamma : \gamma \circ \varphi = 0$ | $\nexists B : A \cdot B = 0$<br>$\nexists B :\ B \cdot A = 0$ |
| $0$ nem s.é. | |

Áttérés egyik bázisból a másikba.

**M:** Áttérés egyik bázisból a másikba:

$C \cdot v_f = v_e \Rightarrow C^{-1} \cdot v_e = v_f$

$C^{-1}AC = B$ ???

Példa diagonalizálható és nem diagonalizálható mátrixokra.

**P:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_A(x) = x^2 - 1 \Rightarrow \nexists$gyöke $\Rightarrow$ $\nexists$ s.v. $\Rightarrow$ $\nexists$ szép bázis $\Rightarrow$ nem diagonalizálható

**P:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k_A(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x_{1-2} = -1, 3 \Rightarrow \forall$ gyöke egyszeres $\Rightarrow$ diagonalizálható

Transzformáció rangja,

Mátrix rangja, sor-, oszlop- és determináns rang megegyezik (magyarázat, de teljes biz. később).

**D:** Rang $= \dim\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$, azaz a maximális független oszlopok száma

**D:** Sorrang = a maximális független sorok száma

**T:** Sorműveletek nem változtatják meg a sorrangot.
**B:** Nem változik a generált altér, mert a vektorok egymással kifejezhetők.
**P:** $\lambda \cdot s_i = s_i' \Longrightarrow s_i = \frac{1}{\lambda} \cdot s_i{}'$
$s_i + \lambda \cdot s_j = s_i' \Longrightarrow s_i = s_i' - \lambda \cdot s_j$

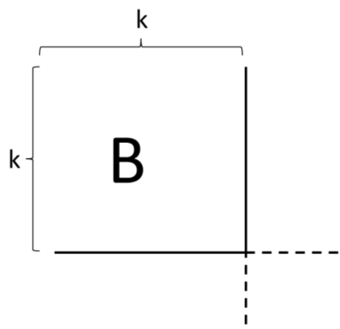
**D:** Determinánsrang $=$ maximális $r$, ahol $\exists r \times r$-es nem $0$ aldet, és $\forall (r+1) \times (r+1)$-es aldet $= 0$.

**T:** detrang $=$ sorrang $=$ oszloprang
**B:**♣ Sorműveletek nem változtatják a sorrangot $\Rightarrow mo. -k = KerA \Rightarrow KerA$ nem változik.
$\Rightarrow \dim KerA$ nem változik $\Rightarrow \dim ImA$ nem változik.
$\Rightarrow \dim ImA =$ oszloprang $\Rightarrow$ oszloprang sem változik.

Átalakítás: $\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & vmi \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{array}$

$r_s$ = lineárisan független sorok = vezéregyesek száma = lineárisan független oszlopok = $r_o$.

♣ $r_{det} = k$, és $\det B \neq 0$ és az első $k$ sor független.
$k+1$-dik sor függ az első $k$-tól, mert:
Kifejtési-tétel: $a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{(k+1)j}A_{(k+1)j} =$
$= a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{(k+1)j} \det B = 0 \Rightarrow \det B \neq 0 \Rightarrow$ lin. öf. $\Rightarrow r_s = k$




Összeg és szorzat rangja.

Mag és kép kapcsolata a homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásával és megoldhatóságával.

**M:** $Ker\ A = Ax = 0$ megoldásai
$Im\ A = \{b \mid Ax = b\}$ megoldható

Rang és megoldhatóság.

Jobbinverz, balinverz, kétoldali inverz.

**D:** Jobbinverz: $AB = I_k$
Balinverz: $BA = I_n$

**T:** Ha $\exists$ balinverz, akkor $Ax = b$-nek $\exists!$ mo.-ja.
**B:** $Ax = b \Leftrightarrow BAx = Bb \Leftrightarrow Ix = Bb \Leftrightarrow x = Bb$

**M:** Ha $n > k \Rightarrow \nexists$ jobbinverz
Ha $n < k \Rightarrow \nexists$ balinverz ???

**M:** Ha ∃ balinverz és jobbinverz is, akkor $B_b = B_j$.

**B:** $\begin{cases} B_b \cdot (A \cdot B_j) = B_b \cdot I = B_b \\ (B_b \cdot A) \cdot B_j = I \cdot B_j = B_j \end{cases} \Rightarrow B_b = B_j$

**M:** $\begin{array}{cc} + & \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & \dots \\ -|A_{12}| & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & |A_{nn}| \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} \end{array} \Longrightarrow Ha\ \exists A^{-1}$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & \dots \\ -|A_{12}| & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & |A_{nn}| \end{pmatrix}$

Létezés ranggal, pl.: $A$-nak pontosan akkor létezik jobbinverze, ha $r(A) =$ sorok száma.

**M:** $A \in T^{k \times n}$

∃ jobbinverz $\Leftrightarrow \langle A\ oszlopai \rangle = T^k \Leftrightarrow r(A) = k$

∃ balinverz $\Leftrightarrow \langle A\ sorai \rangle = T^n \Leftrightarrow r(A) = n$

∃ kétoldali inverz $\Leftrightarrow r(A) = n \cdot k \Longrightarrow \det A \neq 0$

Négyzetes mátrix inverzének kiszámolása determinánsokkal

| $\varphi$ | $A$ |
|---|---|
| $\exists e^{-1}$ | $\exists A^{-1}$ $(\det A \neq 0)$ |
| $\dim Im\varphi = n$ | $r(A) = n$ |
| $\dim Ker\varphi = 0$ | $Ax = 0\ \exists!\ mo.$ |
| $\nexists \gamma : \varphi \circ \gamma = 0$<br>$\nexists \gamma : \gamma \circ \varphi = 0$ | $\nexists B : A \cdot B = 0$<br>$\nexists B : B \cdot A = 0$ |
| 0 nem s.é. | |

## Diagonalizálhatóság átfogalmazása sajátbázissal, sajátalterek dimenzióival.

**D:** Lineáris transzformáció diagonalizálható, ha van „szép” bázis.
$A$ diagonalizálható, ha van olyan bázis, amiben $A$-t felírva diagonális alakú.

**M:** Van „szép” bázis, ha van sajátértékekből álló bázis.
**T:** $A$ diagonalizálható $\Leftrightarrow$ $m_A(x)$ $\forall$ gyöke egyszeres.
**T:** $A$ diagonalizálható $\Leftrightarrow$ $\sum \dim(V_{\lambda_i}) = \dim V$

## A minimálpolinom gyökei pont a sajátértékek.

**T:** A minimálpolinomnak minden sajátérték gyöke.
**B:** $x = x$
$A \cdot x = \lambda \cdot x$
$A^2 \cdot x = A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot \lambda \cdot x = \lambda^2 \cdot x$
$A^3 \cdot x = \lambda^3 \cdot x \Rightarrow$ Stb….
$(a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_0 I)x = (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0)x$
$\Rightarrow p(A) \cdot x = p(\lambda) \cdot x \Rightarrow m_A(A) \cdot x = m_A(\lambda) \cdot x \Rightarrow 0 \cdot x = m_A(\lambda) \cdot x \Rightarrow 0 = m_A(\lambda) \cdot x$
Mivel $x \neq 0 \Rightarrow$ $m_A(\lambda) = 0$

## Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.

**T:** Hasonló mátrixok $k_A$-ja megegyezik.
**B:** $|B - \lambda I| = |x^{-1}Ax - \lambda I| = |x^{-1}Ax - \lambda x^{-1}Ix| = |x^{-1}(A - \lambda I)x| = |x^{-1}|\,|A - \lambda I||x| =$
$= |A - \lambda I||x^{-1}|\,|x| = |A - \lambda I||x^{-1}x| = |A - \lambda I|$

**M:** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
A skalár mátrixok csak önmagukhoz hasonlók.

**M:** Ha $A \sim B$, akkor $\det A = \det B$ és $tr\ A = tr\ B$.

## A mátrix nyoma a sajátértékek összege, a determináns a szorzatuk.

**D:** $A$ nyoma: $tr\ A = \sum a_{ii} = \sum \lambda_i$
$\det A = \prod a_{ii}$
**B:** $k_A(x) = (-x)^n - \sum a_{ii} (-x)^{n-1} + \cdots + \det A$

## Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek.

**T:** A különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.
**B:** Teljes indukció:
♣ 1-re: 1 db vektor független ✓
♣ Tfh $k$-ra igaz
♣ $k+1$-re: $\sum \alpha_i \cdot v_i = 0$ és $0 = A(\sum \alpha_i \cdot v_i) = \sum \alpha_i \cdot A \cdot v_i = \sum \alpha_i \cdot \lambda_i$
$(\sum \alpha_i \cdot v_i) - \lambda_1 \cdot (\sum \alpha_i \cdot \lambda_i) = 0$
$0 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)v_n = 0$
Mivel $k-1$-re függetlenek voltak $\Rightarrow \forall\ \alpha_i = 0 \Rightarrow$ függetlenek

Kétszer-kettes mátrixok hasonlóságának elemzése.

Jordan féle normálalak (csak kimondva) segítségével 9

**T:** $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ 1 & \ddots & & & & & & 0 & \\ & 1 & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & 1 & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \lambda_3 & & \\ & 0 & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & 1 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ alakban minden mátrix felírható.

Csoport fogalma, példák.

**D:** CsoporT: $G$ halmaz és $\cdot$ művelet

- ♣ Asszociatív: $(ab)c = a(bc)$
- ♣ EgységeleM: $\exists e: ea = ae = a$
- ♣ Inverz: $\forall a\ \exists a': aa' = a'a = 1$

**P:** $D_n$ diédercsoport: szabályos $n$-szög szimmetriái, művelet: kompozíció

**P:** $S_n$ szimmetrikus csoport: $n$ elem összes permutációi

**M:** Ha kommutatív, akkor Abel-csoport.
**P:** $(\mathbb{R}^+,\cdot)$

**D:** Csoport *rend*je: csoport elemszáma: $|G|$.

Sok példa elképzelhető, mint permutációk egy csoportja.

Csoporthatás definíciója, sok példa, injektív és nem injektív is.

**D:** $G$ csoport hat $\Omega$ halmazon, ha $\forall g \in G$ és $\forall x \in \Omega$ estén értelmezve van a $g * x \in \Omega$ elem úgy, hogy $g * (h * x) = (gh) * x$ és $1 * x = x$.

Permutációcsoportok. Sok példa.

Injektív pl. 3-,4-,6-szög a csúcsokon, oldalakon.

Ami nem ilyen, pl.: a hatszög szimmetriái az átlókon, mert ez nem bijektív.

$e, g^{-1}$ egyértelmű.

Részcsoport, részcsoportok metszete részcsoport.

10

**D:** RészcsoporT: $H \leq G$: Egy $H \subseteq G$ részcsoport, ha $H$ is csoport ugyanarra a műveletre nézve.
**P:** Triviális részcsoporT: $G \leq G, \{e\} \leq G$
**P:** $(2\mathbb{Z},\cdot) \leq (\mathbb{Z},\cdot)$, $f^i \leq D_3$

**T:** $H \leq G$ részcsoport $\Leftrightarrow h, g \in H \Longrightarrow hg \in H$ és $h^{-1} \in H$
**B:** asszociativitás ✓, $hh^{-1} \in H$

**T:** Részcsoportok metszete is részcsoporT: $H_i \leq G \Longrightarrow \bigcap H_i \leq G$

**B:** ♣ Ha $h, g \in \bigcap H_i \Rightarrow h, g \in H_i$ $\forall i$-re $\Rightarrow hg \in H_i$ $\forall i$-re $\Rightarrow hg \in \bigcap H_i$
♣ Ha $h \in \bigcap H_i \Rightarrow h \in H_i$ $\forall i$-re $\Rightarrow h^{-1} \in H_i$ $\forall i$-re $\Rightarrow h^{-1} \in \bigcap H_i$

A részcsoportbeli egységelem és inverz ugyanaz, mint a csoportban.

**T:** $\exists!\, e$: $e_H = e_G$
**B:** $e_H$ és $e_G$ is egységelem $\Longrightarrow e_H \cdot e_G = e_H$ és $e_H \cdot e_G = e_G \Longrightarrow e_H = e_G$

**T:** $\exists!\, g^{-1}$: $g_1' = g_2{}'$
**B:** Tfh. $g \cdot g_1' = g \cdot g_2' = e \Longrightarrow g_1' \cdot g \cdot g_1' = g_1' \cdot g \cdot g_2' \Rightarrow e \cdot g_1' = e \cdot g_2' \Rightarrow g_1' = g_2{}'$

Generált részcsoport, ennek létezése

**D:** Legyen $K \subseteq G$. $\langle K \rangle$: $K$ által generált részcsoport a $K$-t tartalmazó legszűkebb részcsoport.

A hatványozás tulajdonságai, $g^{-k}$ definíciója, tulajdonságok kiterjesztése negatív számokra.

**M:** $g^n \cdot g^k = g^{n+k}, (g^n)^k = g^{n \cdot k}$
**D:** $g^{-n} = (g^n)^{-1} = (g^{-1})^n$
**M:** $g^n \cdot g^{-k} = g \cdot \ldots \cdot g \cdot g^{-1} \cdot \ldots \cdot g^{-1} = g^{n-k}, (g^n)^{-k} = g^{-n \cdot k}$

Rend, rend tulajdonságai, ciklikus csoport.

**D:** $g$ rendje: $o(g) = k$, ha $a^k = e$ és $a^i \neq e \ \forall 0 < i < k$-ra

**T:** Ekvivalensek:

- ♣ $o(g) = k$
- ♣ $g^n = e \Leftrightarrow k|n$
- ♣ $g^i = g^j \Leftrightarrow k|i-j$
- ♣ $g$-nek pontosan $k$ különböző hatványa van.

**B:** ♣ 1⇒2: $g^n = e \Rightarrow g^n = g^{k \cdot q} \cdot g^r = (g^k)^q \cdot g^r = e^q \cdot g^r = g^r = e$ és $0 \leq r < k \Rightarrow r = 0 \Rightarrow k|n$
$k|n \Rightarrow n = qk \Rightarrow g^n = (g^k)^q = e^q = e$
♣ 1,2⇒3: $g^i = g^j \Leftrightarrow g^{i-j} = e \Leftrightarrow k|i-j$
♣ 3⇒4: Kell: $1, g, g^2, \ldots, g^{k-1}$ különböző.
Tfh. $g^i = g^j \Rightarrow k|i-j \Rightarrow i-j = 0 \Rightarrow i = j$

Ciklikus csoport részcsoportja ciklikus.

**D:** $C_n$: Ciklikus csoporT: egy elem által generált csoport
**M:** Izomorfjai erejéig 1 db $m$-edrendű ciklikus csoport van.
**B:** $g^i \cdot g^j = g^{i+j \bmod m}$ és $g^m = 1 \Rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}_m, +$, azaz $g^i \rightarrow i$.
**P:** $n$-dik egységgyökök a szorzásra, szabályos $n$-szög forgatásai

**T:** $H < G$. $G$ ciklikus $\Rightarrow H$ ciklikus

**B:** $G = \langle g \rangle \Rightarrow H = \{g^{a_1}, \ldots, g^{a_k}\}$.
$a_i = a_1 \cdot q + r \Rightarrow g^{a_i} = (g^{a_1})^q \cdot a^r \Rightarrow g^{a_i} \cdot (g^{a_1})^{-q} = a^r \in H$
Mivel $r < a_1$ és $a_1 < a_i$ $\forall i$-re, ezért $r = 0 \Rightarrow a_1|a_i$.

Jobb- és baloldali mellékosztályok.

**D:** Legyen $H \leq G$ részcsoport. $g \in G$. A $Hg$ szorzat $H$ $g$ szerinti jobboldali *mellékosztály*a.
Legyen $H \leq G$ részcsoport. $g \in G$. A $gH$ szorzat $H$ $g$ szerinti baloldali *mellékosztály*a.

**T:** $Hg \cap H = \emptyset$

**B:** Tfh $a \in Hg$. Ekkor $\exists\, a' \in H: a = a'g \Rightarrow g = a'^{-1}a$.
$a' \in H \Rightarrow a'^{-1} \in H \Rightarrow a'^{-1}a \in H \Rightarrow g \in H$ ↯

**T:** $|Hg| = |H|$
**B:** Ha $g \in H \Rightarrow H = Hg$. Különben $h_1 g = h_2 g \Leftrightarrow h_1 g g^{-1} = h_2 g g^{-1} \Leftrightarrow h_1 = h_2$

**T:** Két különböző jobboldali mellékosztály vagy egybeesik, vagy diszjunktak.

**B:** $Hg_1 = Hg_2 \Leftrightarrow Hg_1 g_2^{-1} = H \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in H$
$g_2 \in Hg_1 \Leftrightarrow \exists a \in H: g_2 = ag_1 \Rightarrow a = g_2 g_1^{-1} \Longrightarrow Ha = H \Leftrightarrow Hg_2 g_1^{-1} = H \Leftrightarrow Hg_1 = Hg_2$

## Lagrange-tétel.

**T:** Lagrange-tétel: Ha $G$ véges és $H \leq G \Rightarrow |H|\,|\,|G|$

**B:** $|G:H|$: $H$ mellékosztályainak száma. $G = \bigcup Hg$
$|G| = |\bigcup Hg| = \sum |Hg| = |G:H||H|$

## spec eset: Euler-Fermat tétel.

**T:** $|\langle g \rangle| = o(g)$

Köv.: $o(g)\,|\,|G| \Rightarrow g^{|G|} = e$
speciális eseT: Euler-Fermat-tétel: $\mathbb{Z}_n$ redukált maradékosztályai $\cdot$-ra: $\varphi(n) = |rmo.| \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv n$

## Csoportizomorfizmus.

**T:** *Cayley-tétel*: Minden csoportnak van permutációreprezentációja.
Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

**B:** $\varphi: G \to S_G : g \to \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ g_1 g & \cdots & g_n g \end{pmatrix}$ és $k \in G$
Ez permutáció, mert:

- $\forall$ elem szerepel alul: $g_i g = k \Rightarrow g_i = k g^{-1}$
- $\forall$ elem pontosan egyszer szerepel: $g_i g = g_j g \Rightarrow g_i = g_j$

Művelettartó, mert: $\varphi(gh) = \begin{pmatrix} g_i \\ g_i(gh) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i \\ (g_i g)h \end{pmatrix} = \varphi(g)\varphi(h)$

## $S_3 \cong D_3$ és $S_4 \cong T$, de pl. $D_4 \ncong S_4$

D: $G_1 \cong G_2$: $G_1$ és $G_2$ izomorf $\Leftrightarrow \exists \varphi: G_1 \to G_2$ bijektív leképezés, hogy $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$
Pl.: $S_3 \cong D_3$
Pl.: $K$: kocka szimmetriái: $\exists H \leq S_6$, hogy $K \cong H$ és $\exists H \leq S_8$, hogy $K \cong H$

## Minden $m$-elemű ciklikus csoport izomorf $(Z_m, +)$-szal.

## Cayley-táblázat, annak néhány tulajdonsága

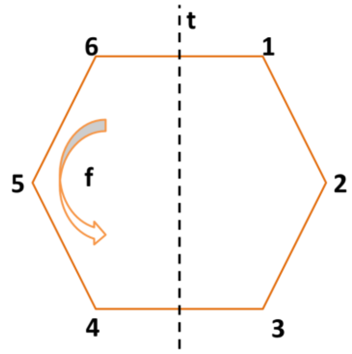
**T:** Cayley-tábla: $\mathbb{Z}_4$:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

**M:** „Sudokus”: minden sorban és minden oszlopban minden elem pontosan egyszer szerepel
**B:** Egy sor tartalmazza a csoport összes elemét. $y = g(g^{-1}y) = gx$ alakban.

Absztrakt számolás $D_n$-ben, elemek előállítása.

Pálya, stabilizátor,



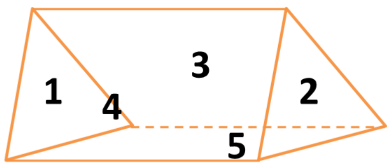

**D:** $\alpha \in \Omega$ *stabilizátor*a azon elemek halmaza, amelyekre $\{g \in G | \alpha g = \alpha\}$
**P:** $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, 3 stabilizátora: $st_G(3) = \{tf, id\}$

**T:** A stabilizátor csoport.

**B:** Részcsoport, mert ha $\alpha g = \alpha$ és $\alpha h = \alpha$, akkor:

- ♣ $\alpha gh = \alpha h = \alpha$
- ♣ $\alpha = \alpha g^{-1}$

**D:** $\alpha$ *pályáj*a: ahova $\alpha$ mehet: $orb_G(\alpha) = G(\alpha) = \{\alpha g | g \in G\}$
**P:** $\Omega = \{1, \dots, 5\}$, $G(1) = \{1,2\}$, $G(3) = \{3,4,5\}$




**T:** A pálya ekvivalenciareláció:
**D:** $\sim$ reláció: $\alpha \sim \beta \iff \exists g\colon\ \alpha g = \beta$

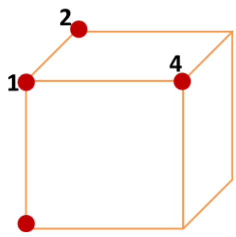
**B:** ♣ $\alpha \sim \alpha$, mert $\alpha \cdot id = \alpha$
♣ $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$, mert $\alpha g = \beta \Rightarrow \alpha = \beta g^{-1}$
♣ $\alpha \sim \beta$és $\beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$, mert $\alpha g = \beta,\ \beta h = \alpha gh = \gamma$

Orbit-stabilzátor-lemma.

**T:** Orbit-stabilizátor lemma: $|G| = |st_G(\alpha)| \cdot |G(\alpha)| \iff |G(\alpha)| = |G : G(\alpha)|$

**B:** Bijekció: $G(\alpha)$ és a baloldali mellékosztályok között
$$\beta \to \{g \in G | \alpha g = \beta\}$$

Alkalmazások pl.: négyzet és a kocka szimmetriáinak száma.




Négyzet szimmetriái: $|orb\ (1)| = 4, |st_1| = 2 \Rightarrow 8$ db szimmetria

Kocka szimmetriái: $|orb\ (1)| = 8, |st(1)| = \left|orb_{st(1)}(2)\right| \cdot \left|st_{1,2}\right|$
$= 3 \cdot \left|orb_{st(1,2)}(4)\right| \cdot \left|st_{1,2,4}\right| = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow 48$ db szimmetria

Ciklikus csoport részcsoportjai.

Homomorfizmus, mag, kép.

**D:** Legyenek $G_1, G_2$ csoportok. A $\varphi: G_1 \to G_2$ leképezést homomorfizmusnak nevezzük, ha $\forall a, b \in G_1$-re $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

**P:** $G_1 = G_2, \varphi = id$

**P:** $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +), \varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}, a + bi \to a$ 13

**D:** Homomorfizmus magja: $Ker\ \varphi = \{g \in G_1 | \varphi(g) = 1_{G2}\}$

**D:** Homomorfizmus képe: $Im\ \varphi = \{g \in G_2 | \exists h \in G_1 : \varphi(h) = g\}$

A mag mellékosztályai megfelelnek a kép elemeinek.

**T:** A mag mellékosztályai megfelelnek a kép elemeinek:

**B:** $Ker\varphi x$ mellékosztály minden eleme ugyanabba a $g$ elembe képződik le, mert:

$$h \in Ker\varphi, x \in G_1 : \varphi(x) = g, g \in Im\varphi:\ \varphi(xh) = \varphi(x)\varphi(h) = g$$
$$\varphi(y) = g : \varphi(yx^{-1}) = \varphi(y)\varphi(x^{-1}) = gg^{-1} = 1_{G_2}$$
$$\Rightarrow\ yx^{-1} = k \in Ker\ \varphi \Rightarrow y = kx \in \frac{G_1}{Ker\varphi}$$

A mag jobb- és baloldali mellékosztályai megegyeznek.

**T:** $Ker\ \varphi$ jobb és baloldali mellékosztályai megegyeznek. $\Leftrightarrow N = Ker\ \varphi$ normálosztó

$\Leftrightarrow hN = Nh\ \forall h \in G - \text{re} \Leftrightarrow h^{-1}Nh = N\ \ \forall h \in G$-re $\Leftrightarrow h^{-1}gh \in N\ \ \forall h, g$-re

**B:** $Ker\ \varphi \leq G_1$, mert ha $g_1, g_2 \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = I_{G_2}$ és $\varphi(g_1^{-1}) \in Ker\varphi$.

$h \in G_1 \Rightarrow \varphi(h^{-1}gh) = \varphi(h^{-1})\varphi(g)\varphi(h) = \varphi(h^{-1})I_{G_2}\varphi(h) = I_{G_2}$

$|G_1| = |Im||Ker|$ .

**T:** $|G| = |Im\varphi||Ker\varphi|$

Sok-sok példa, pl.: Z-ből a maradékosztályokba, determináns, logaritmus, $e^x$.

**P:** $\mathbb{Z}^+ \to mod\ m$ maradékosztályok

$Ker\varphi = \{u \in \mathbb{Z}^+ | m|u\}, Im\varphi =$teljes maradékrendszer

**P:** $GL_n(k) \to \{k - \{0\}\}, A \to \det A$

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

$Ker\varphi = SL_n(k)$: 1 determinánsú mátrixok, $Im\varphi = k^{n\times n}$

**P:** $\mathrm{S_n} \to \mathbb{Z}, A \to$ előjele

$Ker\varphi = A_n$: alternáló csoporT: ps. permutációk, $Im\varphi = \{\pm 1\}$

**P:** $D_n \to \mathbb{Z}_2^+ : \varphi(x) = \begin{cases} 0\ ha\ f \\ 1\ ha\ t \end{cases}$

$Ker\varphi = f, Im\varphi = \mathbb{Z}_2^+$

**P:** $A \times B \to B, \varphi: (a, b) \to b$

$Ker\varphi = \{(a, e)\}, Im\varphi = B$

**P:** $\begin{cases} \mathbb{R}^+, \cdot \to \mathbb{R}, +, \varphi(a) \to \log a \\ \mathbb{R}, + \to\ \mathbb{R}^+, \cdot, \varphi(a) \to e^a \end{cases} \Rightarrow$ bijekció

**P:** Kocka $\to S_8$: csúcsok: $Ker\varphi = id$

Kocka $\to S_6$: lapok: $Ker\varphi = id$ 12

Kocka $\to S_4$: testátlók: $Ker\varphi = id$, középpontos tükrözés, $Im\varphi = S_4$

Kocka $\to S_3$: szemben lévő lapátlók: $Im\varphi = S_3$

Homomorfizmusok $D_n$-ből és $S_n$-ből $Z_2$-be, példák csoporthatásra.

Kocka szimmetriáiból $S_{8,6,4,3}$-ba.

Direkt szorzat, elemrend a direkt szorzatban.

**D:** $A$ és $B$ csoport. $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$ csoport.
$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$, $(e,e)$ egységelem, $(a,b)(a^{-1},b^{-1}) = (e,e)$ inverz

**T:** Minden végesen generált Abel-csoport előáll prímhatvány rendű ciklikus csoportok direkt összegeként és sorrendtől eltekintve egyértelmű.

**P:** $C_6 = C_2 \times C_3$: $C_2 = \{a^3, e\}$ és $C_3 = \{a^2, a^4, e\}$
$a = a^4a^3, a^2 = a^2e, a^3 = ea^3, a^4 = a^4e, a^5 = a^3a^2$

**P:** $C_{100} = C_4 \times C_{25}, \quad C_2 \times C_2 \times C_{25}, \quad C_4 \times C_5 \times C_5, \quad C_2 \times C_2 \times C_5 \times C_5$
$4$ féle $100$ elemű Abel-csoport létezik.

Invertálható transzformációk és invertálható mátrixok jellemzése.

## Relációk jellemzése, fogalmak.

**D:** $A$ halmaz. $H \subseteq A^n$

**M:** $A$ halmaz bármely $n$ elemére eldönthető, hogy relációban állnak vagy sem.

**P:** KisebB: $\{(a,b)|a < b\} \subseteq A^2$

**P:** Függvény: $\{(x,x^2)\} \subseteq A^2$

**P:** $R(a,b) \iff \exists c: ac = b$

**P:** $R(a,b) \iff \exists 7|a - b$

**D:** MűveleT: $A^2 \rightarrow A$

**P:** $+: (3,7) \rightarrow 10$

**D:** $R$ reflexív $\Leftrightarrow$ $R(a,a)$

$R$ teljes $\Leftrightarrow$ $R(a,b)$ vagy $R(b,a)$

$R$ szimmetrikus $\Leftrightarrow$ $R(a,b) \Rightarrow R(b,a)$

$R$ antiszimmetrikus $\Leftrightarrow$ $R(a,b) \Rightarrow nem\ R(b,a)$

$R$ tranzitív $\Leftrightarrow$ $R(a,b)$ és $R(b,c) \Rightarrow R(a,c)$

$R$ trichotóm $\Leftrightarrow$ $R(a,b)\ vagy\ R(b,a)\ vagy\ a = b$

**P:** $<$: antiszimmetrikus, trichotóm, tranzitív

**P:** $=$: reflexív, szimmetrikus, tranzitív

**P:** $|$: reflexív, tranzitív

**D:** Ekvivalenciareláció: $A = \bigcup A_i$ (diszjunktak) $\Rightarrow a \sim b \Leftrightarrow \exists i: (a,b) \in A_i$

**M:** $a$ és $b$ ugyanabba a részhalmazba esik.

**M:** reflexív: $R(a,a)$

tranzitív: $R(b_1,a)$ és $R(a,b_2) \Rightarrow R(b_1,b_2)$

szimmetrikus: $R(a,b) \Rightarrow R(b,a)$

**P:** $7|a - b$: reflexív, szimmetrikus, tranzitív

Sor-, oszlop- és determinánsrang egyenlősége, két bizonyítás.

Cayley-tétel

## Transzpozícióval való szorzás változtatja az inverziók számának paritását.

**T:** Transzpozícióval való szorzás változtatja az inverziók számának paritását.

**B:** $\begin{pmatrix} \dots & a_i & \dots & a_j & \dots \\ \dots & a_j & \dots & a_i & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i & \dots & j & n \\ \Pi_1 & \Pi_i & \dots & \Pi_j & \Pi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & \dots & j & n \\ \Pi_1 & \Pi_j & \dots & \Pi_i & \Pi_n \end{pmatrix}$

Inverziók számának változása:

$i, j$ elemek

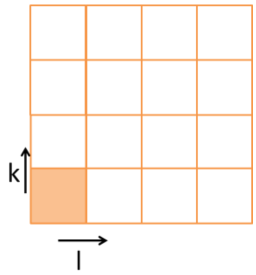
$i, j$ közötti elemek:

Ha $i$-vel inverzióban volt, $j$-vel nem, akkor ez éppen megfordul.

Ha mindegyikkel inverzióban volt, egyikkel sem lesz.

Ha egyikkel sem volt inverzióban, mindegyikkel lesz.

## Tologatós játék: két kiskocka nem cserélhető fel.




Tologatós játék: Két kiskocka nem cserélhető fel.

**B:** Egy lépés = egy csere

Két kiskocka cseréje $= (1,2) \Rightarrow$ páratlan

De ha a lyuk visszaér $\Rightarrow$ $k$-szor fel és $k$-szor le, $l$-szer jobbra, $l$-szer balra

## Rubik-kocka: egy élkocka nem fordítható meg. Két élkocka nem cserélhető fel.

## Páros-város (bizonyítása deterinánssal is és ranggal is).

Páros-város, kocsmábajárási mátrix:

B1: $n$ ember $\Rightarrow 2^n$ kocsma

Polgármester: $\forall$ kocsmába páros sok ember járjon $\Rightarrow$ párba állnak $\Rightarrow 2^{\frac{n}{2}}$ kocsma

Polgármester: $\forall$ kocsmába páratlan sok ember járjon $\Rightarrow$ polgármester is járjon midenhova

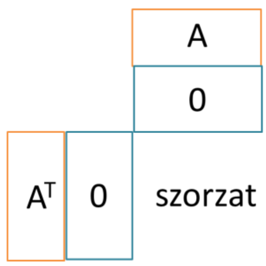
Polgármester: $|k_i| =$ páros és $|k_i \cap k_j| =$ páratlan:

kocsmábajárási mátrix: $\begin{array}{c|ccc} & k_1 & \dots & k_t \\ \hline e_1 & 1 & & \\ \dots & & 0 & \\ e_n & 1 & & \dots \end{array}$

$A^T \cdot A$: $\begin{array}{c|ccc} & e_1 & \dots & e_n \\ \hline k_1 & 1 & & 1 \\ \vdots & & 0 & \\ t_k & & & \ddots \end{array} \cdot mod\ 2 \quad \begin{array}{c|ccc} & k_1 & \dots & k_t \\ \hline e_1 & 1 & & \\ \vdots & & 0 & \\ e_n & 1 & & \ddots \end{array} \begin{pmatrix} |k_1| & & \\ |k_1 \cap k_2| & \ddots & \\ & & |k_n| \end{pmatrix}$ Kell: $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A^T \cdot A = 0.$

Tfh. $t > n$ $\Rightarrow$ kip=tolom $0$-kal négyzetesre

$A^T \cdot A = B^T \cdot B$, de $\det(A^T \cdot A) = 1$ és $\det(B^T \cdot B) = \det B^T \cdot \det B = 0$ ↯




B2: Ranggal ???

## 11 szám 30-nál kisebb prímosztókkal.

11 szám $30$-nál kisebb prímosztókkal. Van köztük néhány, amelyek szorzata négyzetszám.

**B:** 10 db príM: $c_i \to \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{10} \end{pmatrix}$ kitevők $mod\ 2$.

Max $10$ lehet független $\Rightarrow$ ez a $11$ darab lin. öf. $\Rightarrow \sum \lambda_i \cdot a_i = 0$.

Szorozzuk össze azokat, amelyekre $\lambda_j \neq 0$, azaz $\lambda_j = 1$. Ezekre $\sum \lambda_j \cdot a_j = \sum a_j = 0$.

Tehát $\prod c_j =$ négyzetszám.

Sortündérek-oszloptündérek

Összekevert sakktábla: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots \\ \vdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \dots \end{pmatrix}$.

Egy sortündér vagy oszloptündér változtatása: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \dots \end{pmatrix}$ vagy $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots \end{pmatrix}$ alakút ad hozzá

$\Rightarrow$ 16 darab, amiből $15$ független

$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$-ból előáll az eredeti $\Rightarrow$ elég a $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$-t előállítani

$\Rightarrow A$ visszaállítható $\Leftrightarrow A \in \langle s_i, o_i \rangle \Rightarrow \dim V = 15 \Rightarrow 2^{15}$ darab sakktábla állítható vissza

$\dim\left(M^{8\times 8}(\mathbb{Z})\right) = 64$

2 × 2-es tündérek (pontos jellemzés).

Négyzetes tündérek:

$49$ db tündér $\Rightarrow 49$ dimenziós alteret generálnak, azaz $\dim Im\langle n_i \rangle = 49$

Egy négyzetes tündér mátrixa pl.: $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Minden sorban és oszlopban páros sok $1$-es van.

A $0$-ból olyan színezések állnak elő, amelyben minden sorban és oszlopban páros sok $1$-es van

$\Rightarrow 16$ db feltétel, amiből $15$ független $\Rightarrow \dim Ker\langle n_i \rangle = 15$

Nincs több feltétel, mert $15 + 49 = 64$, azaz $\dim Ker\langle n_i \rangle + \dim Im\langle n_i \rangle = \dim\langle n_i \rangle$

$\Rightarrow A$ visszaállítható $\Leftrightarrow$ minden sorban és oszlopban páros sok $1$-es van

Az előző kettő együtt sem elég.

Determinánsok szorzástétele.

A mátrix műveletek és a transzformációk közti műveletek kapcsolata: kompozíció párja a mátrixszorzás.

**T:** A mátrix műveletek és a transzformációk közti műveletek kapcsolata: kompozíció párja a mátrixszorzás.

Sor- oszlop- és determináns rang megegyezik (2 bizonyítás).

Cramer-szabály.

T: *Cramer-szabály*: Legyen $A \in T^{n\times n}$ és $\det A \neq 0$. $Ax = b$-nek $\exists!$ mo.

$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, ahol $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

**B:** $\exists A^{-1}$

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & \dots \\ -|A_{12}| & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & |A_{nn}| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} b_1 A_{11} - b_2 A_{21} + \cdots \\ \vdots \\ \pm b_1 A_{1n} \pm b_2 A_{2n} + \cdots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x_i = \frac{b_1(-1)^{i+1}A_{1i} + b_2(-1)^{i+2}A_{2i} + \cdots}{\det A} = \frac{|A_i|}{|A|}$ a kifejtési tétel (i. sor) szerint

## Minden polinomnak van olyan többszöröse, amelyben minden kitevő prímszám.

**T:** Minden polinomnak van olyan többszöröse, amelyben minden kitevő prímszám.

$$(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot g(x) = a_1 x^{p_1} + \cdots a_{n+1} x^{p_{n+1}}$$

**B:** $\begin{cases} x^{p_1} = q_1(x) \cdot f(x) + r_1(x) \\ \vdots \\ x^{p_{n+1}} = q_{n+1}(x) \cdot f(x) + r_{n+1}(x) \end{cases}$, ahol $\deg r_i < n$ vagy $r_i = 0$.

Ekkor $f(x) |\ x^{p_i} - r_i(x)$ és $r_i$-k lineárisan öf.

$\Rightarrow a_1 r_1 + \cdots a_{n+1} r_{n+1} = 0$: nem $\forall a_i = 0$

$\begin{cases} a_1 r_1 + \cdots a_{n+1} r_{n+1} \\ a_1 x^{p_1} + \cdots a_{n+1} x^{p_{n+1}} \end{cases} \Rightarrow f(x) | a_1(r_1 - x^{p_1}) + \cdots + a_{n+1}(r_{n+1} - x^{p_{n+1}})$

$\Rightarrow f(x) | a_1 x^{p_1} + \cdots a_{n+1} x^{p_{n+1}}$

## A Fibonacci-számok képlete mátrix diagonalizálással.

Fibonacci-számok képlete mátrix diagonalizálással

$$\begin{array}{cccccccccc} \cdot & \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix} & & \cdot & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & \cdot & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} f_{i+1} \\ f_{i+2} \end{pmatrix} & \Rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}' & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n & \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = x^{-1} D x$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = (x^{-1} D x)^n = x^{-1} D x x^{-1} D x \dots x^{-1} D x = x^{-1} D^n x$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sajátértékei: $\begin{vmatrix} 0 - x & 1 \\ 1 & 1 - x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1 \Rightarrow \lambda_{1-2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Sajátvektorok: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ sv: $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ $\lambda_1$-hez

$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ $\lambda_2$-hez

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) ???$$

## Kettős leszámlálás módszere. pl: Osztók számának átlagértéke $\log n$.

Kettős leszámlálás módszere: pl: Osztók számának átlagértéke $\log n$.

$$\sum d(j) = \sum \left[\frac{n}{i}\right] \sim \sum \frac{n}{i}$$

$$\frac{\sum d(j)}{n} = \frac{\sum \frac{n}{i}}{n} = \sum \frac{1}{i} \sim \log n$$

| | **1** | **2** | **3** | **j** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| **2** | **0** | **1** | | |
| **3** | **0** | **0** | **1** | |
| **i** | | | | **d(j)** db 1-es |
| | $\left[\frac{n}{i}\right]$ db 1-es | | | |

Burnsidelemma,

**T:** *Burnside-lemma*: $\frac{1}{|G|}\sum fix(g)$ = pályák száma. $fix(g) = \{\alpha | \alpha g = \alpha\}$

**B:** Vegyük $(\alpha, g)$ párokat.

Ha $g$ rögzített, akkor $(g, \alpha)$ párok száma $g$ fixpontjai

Ha $\alpha$ rögzített, akkor $(g, \alpha)$ párok száma $\alpha$ stabilizátorának elemszáma: $G_\alpha$

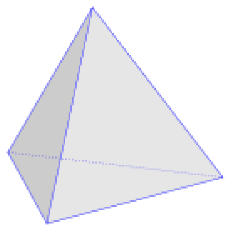
$\Rightarrow \sum_{\alpha\in\Omega}|G_\alpha| = \sum_{g\in G} fix(g) \;\Rightarrow\; \sum_{\alpha\in\Omega}\frac{|G_\alpha|}{|G\,|} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} fix(g)$

$\sum_{\alpha\in\Omega}\frac{|G_\alpha|}{|G\,|} = \sum_{pálya}\frac{|orb_G(\alpha)||G_\alpha|}{|G\,|} = \sum_{pálya} 1$ = pályák száma

$\Rightarrow \frac{1}{|G|}\sum fix(g)$ = pályák száma

ennek alkalmazása leszámlálásra: tetraéder lapjainak színezése 3 színnel,

Elforgatás erejéig hány különböző módon lehet kiszínezni 3 színnel egy tetraédert?



$(2,3,4)$ $4\cdot 2 = 8$ db $3^2 = 9$ színezés

$(1,2)$ $\binom{4}{2} = 6$ db $3^3 = 27$ színezés

$(1,2,3,4)$ $\frac{4!}{4} = 6$ db 3 színezés

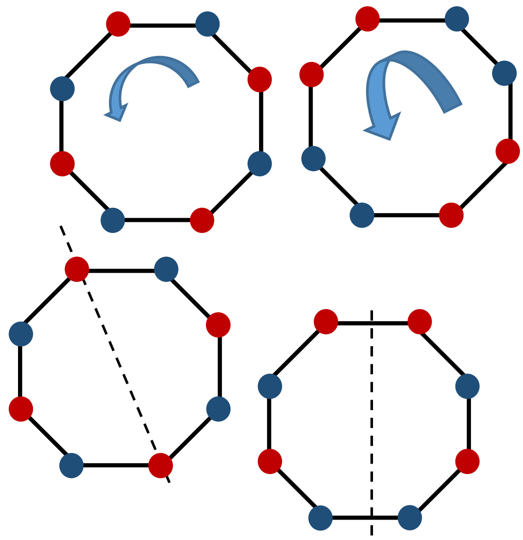
$(1,2)(3,4)$ 3 db $3^2 = 9$ színezés

$id$ 1 db $3^4$ színezés

$$\Rightarrow \frac{8\cdot 9 + 6\cdot 27 + 6\cdot 3 + 3\cdot 9 + 3^4}{24} = 15$$

karkötő 4-4 piros és kék golyóból.

Karkötő 4 kék és 4 piros gyöngyből



$t_1$ 4 db $\binom{4}{2}$ fixpont

$t_2$ 4 db $\binom{4}{2}$ fixpont

$f, f^3, f^5, f^7$ 4 db $\forall$ gyöngy ugyanolyan színű lenne ↯

$f^2, f^6$ 2 db 2 fixpont

$f^4$ 1 db $\binom{4}{2}$ fixpont

$id$ 1 db $\binom{8}{4}$ fixpont

$$\Rightarrow \frac{4\cdot 6 + 4\cdot 6 + 2\cdot 2 + 6 + \binom{8}{4}}{16} = 8$$

Tetszőleges sokszínű karkötők darabszáma.

Prímoldalú sokszög színezése: 1. Fermat-tétel. 2. Cauchy-tétel.

Prímoldalú sokszög színezése: **Fermat-tétel** bizonyítása
$p$ oldalú sokszöget $n$ színnek színezünk
$id$ helybenhagy $n^p$ darabot
$f^i$ helybenhagy $n$ darabot ($\forall f^i$ ugyanannyit hagy helyben, mert ugyanannyi az orbitja, az összes csúcs)
A nem egy színűek $p$-es csoportokba oszthatók. ($p$ darab elforgatás)
$\Rightarrow n^p - n$ darabot $p$ csoportba osztok $\Rightarrow p|n^p - n$

Prímoldalú sokszög színezése: **Cauchy-tétel** bizonyítása
$p||G|$. $p$ oldalú sokszöget színezünk $g \in G$ csoportelemekkel.
Összesen $g^p$ darab színezés
Csak azokat veszem, ahol $g_1 g_2 \dots g_p = 1$
$g_1 g_2 \dots g_p = 1 \Leftrightarrow g_p g_1 g_2 \dots g_{p-1} g_p g_p^{-1} = g_p g_p^{-1} \Leftrightarrow g_p g_1 g_2 \dots g_{p-1} = 1 \Leftrightarrow$ elforgatottjára is igaz
$g_p$ egyértelmű $g_1 g_2 \dots g_{p-1}$-ből $\Rightarrow |G|^{p-1}$ ilyen színezés van
Forgatás szerint csoportba rendezem a színezéseket:

$p$-es csoportok (forgatással $p$ különbözőt kapok)

1-es csoportok ($g^p = 1$)($\forall$ ugyanolyan színű): pl.: $(1,1,\dots,1)$

$|G|^{p-1} = p \cdot sok + 1 \cdot (1 + más) \Rightarrow p||G|^{p-1}$ és $p|p \cdot sok \Rightarrow p|1 + más \Rightarrow \exists más$
$\Rightarrow$ Cauchy-tétel: Ha $p||G|$, akkor $G$-ben van $p$-edrendű elem. ???

Példa alakzatra, amelynek végtelen sok szimmetria tengelye van, és nem középpontosan szimmetrikus.

$\langle t_1, t_2 \rangle = t_1$ vagy $f^k t_1$???

A transzformációk kompozíciója megfelel a mátrixszorzásnak. Ebből: mátrixszorzás jó definíciója, asszociativitás.

A determináns, mint térfogat (mérték), azaz a determináns konstans szorzó erejéig az egyetlen nemelfajuló alternáló multilineáris forma.

**T:** A determináns, mint térfogat (mérték), azaz a determináns konstans szorzó erejéig az egyetlen nemelfajuló alternáló multilineáris forma.

**B:** $V(g_1, \dots, g_n): \Pi^n \to \Pi$

$V(e_1, \dots, e_n) = 1$
$V(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) = \lambda V(a_1, \dots, a_n)$
$V(a_1, \dots, a_i, +b_i \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + V(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$
$V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i \dots, a_n) = 0$
$V(a_1, \dots, a_i, \dots \sum \lambda_i a_i) = 0$
$0 = \lambda \cdot V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_i, \dots, \lambda \cdot a_i \dots, a_n)$
$V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j \dots, a_n) = A \Rightarrow V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j + \lambda \cdot a_i \dots, a_n) = A$
$V(a_1, \dots, a_i, \dots, 0) = V(a_1, \dots, a_i, \dots, \lambda \cdot 0) = \lambda \cdot V(a_1, \dots, a_i, \dots, 0)$
$\Rightarrow V(a_1, \dots, a_i, \dots, 0) = 0$
$V(a_1, \dots, a_i, +b_i, \dots, a_i, +b_i, \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) + V(a_1, \dots, b_i, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) =$
$= V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) + V(a_1, \dots, a_i, \dots, b_i, \dots, a_n) + V(a_1, \dots, b_i, \dots, a_i, \dots, a_n) + V(a_1, \dots, b_i, \dots, b_i, \dots, a_n) =$
$= V(a_1, \dots, a_i, \dots, b_i, \dots, a_n) + V(a_1, \dots, b_i, \dots, a_i, \dots, a_n)$
$\Longrightarrow V(a_1, \dots, a_i, \dots, b_i, \dots, a_n) = -1 \cdot V(a_1, \dots, b_i, \dots, a_i, \dots, a_n)$
$V(a_1, \dots, a_n) = V(\sum \lambda_{i1} e_i, \sum \lambda_{i2} e_i, \dots, \sum \lambda_{in} e_i)$
$= V(\lambda_{11} e_1, \sum \lambda_{i2} e_i, \dots, \sum \lambda_{in} e_i) + \cdots + V(\lambda_{n1} e_n, \sum \lambda_{i2} e_i, \dots, \sum \lambda_{in} e_i) = \cdots \Rightarrow$ $n^n$db tag
$= \sum V\left(\lambda_{\Pi(1)1} e_{\Pi(1)}, \dots, \lambda_{\Pi(n)n} e_{\Pi(n)}\right) = \sum \lambda_{\Pi(1)1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{\Pi(n)n} V\left(e_{\Pi(1)}, \dots, e_{\Pi(n)}\right)$
$= \sum \lambda_{\Pi(1)1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{\Pi(n)n} (-1)^{sgn\Pi} = \det A$