49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

2008. július 16., szerda

1. Feladat. A hegyesszögű ABC háromszög magasságpontja H. Az a H-n átmenő kör, amelynek középpontja a BC szakasz felezőpontja, a BC egyenest A_1-ben és A_2-ben metszi. Hasonlóan, az a H-n átmenő kör, amelynek középpontja a CA szakasz felezőpontja, a CA egyenest B_1-ben és B_2-ben metszi, az a H-n átmenő kör pedig, amelynek középpontja az AB szakasz felezőpontja, az AB egyenest C_1-ben és C_2-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy az A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 pontok egy körön fekszenek.

2. Feladat. (a) Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1$$

egyenlőtlenség teljesül minden olyan, 1-től különböző x, y, z valós számok esetén, amelyekre $xyz=1$.

(b) Mutassuk meg, hogy van végtelen sok olyan, 1-től különböző racionális számokból álló x, y, z számhármas, amelyre $xyz=1$, és amelyre a fenti egyenlőtlenségben az egyenlőség esete áll fenn.

3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy van végtelen sok olyan n pozitív egész szám, amelyre (n^2+1)-nek van olyan prímosztója, ami nagyobb, mint $2n+\sqrt{2n}$.

Munkaidő: 4 óra 30 perc.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

2008. július 17., csütörtök

4. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ függvényt (f tehát a pozitív valós számok halmazából a pozitív valós számok halmazába képez), amelyre

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

teljesül, valahányszor w, x, y, z olyan pozitív valós számok, amelyekre fennáll $wx = yz$.

5. Feladat. Legyenek n és k pozitív egészek, amelyekre $k \geqslant n$ és $k - n$ páros szám. Adott $2n$ lámpa, amelyek 1-től $2n$-ig vannak számozva, és amelyek mindegyike *be*(kapcsolt) vagy *ki*(kapcsolt) állapotban lehet. Kezdetben mindegyik lámpa ki állapotban van. *Lépés*ek egy sorozatát tekintjük: egy lépés abból áll, hogy valamelyik lámpa állapotát megváltoztatjuk (be-ről ki-re vagy ki-ről be-re).

Legyen N az olyan, k lépésből álló sorozatok száma, amelyek eredményeképpen az 1-től n-ig számozott lámpák bekapcsolt, az $(n+1)$-től $2n$-ig számozott lámpák pedig kikapcsolt állapotban lesznek.

Legyen M az olyan, k lépésből álló sorozatok száma, amelyek eredményeképpen az 1-től n-ig számozott lámpák bekapcsolt, az $(n+1)$-től $2n$-ig számozott lámpák pedig kikapcsolt állapotban lesznek, és a sorozatban az $(n+1)$-től $2n$-ig számozott lámpák semelyikét sem kapcsoljuk be semmikor.

Határozzuk meg az N/M hányados értékét.

6. Feladat. Legyen $ABCD$ konvex négyszög, amelyben $|BA| \neq |BC|$. Jelölje ω_1, ill. ω_2 az ABC, ill. ADC háromszögek beírt körét. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan ω kör, amelyik érinti a BA félegyenes A-n túli részét és a BC félegyenes C-n túli részét, továbbá érinti az AD és CD egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy az ω_1 és ω_2 körök közös külső érintői az ω körön metszik egymást.

Munkaidő: 4 óra 30 perc.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.