

A képakasztó játék

Vígh Viktor

2017. november 11.

XI. Országos Ördöglakat Találkozó

A. Spivak a Quantum magazin 1997. május-júniusi számában tűzte ki a következő fejtörőt „Különös festmény” címen:

Spivak kérdése

„Dr. Smile rendelőjének várótermében egy kép lóg a falon. A kép különlegessége abban rejlik, ahogy fel lett akasztva. Dr. Smile egy helyett kettő szöget vert a falba, és úgy akasztotta fel rájuk a festményt, hogy ha bármelyik szöget kihúzzuk, a festmény leesik. Hogyan csinálta?”

$(1, n)$ -játék

Akasszuk fel a képet kettő helyett, 3, 4, stb., általában n darab szögre úgy, hogy bármelyik szöget kihúzva, a festmény essen le.

$(1, n)$ -játék

Akasszuk fel a képet kettő helyett, 3, 4, stb., általában n darab szögre úgy, hogy bármelyik szöget kihúzva, a festmény essen le.

(k, n) -játék

Akasszuk fel a képet kettő helyett n darab szögre úgy, hogy bármelyik k darab szöget kihúzva, a festmény essen le, de $k - 1$ darab szöget kihúzva soha.

Probléma

Adott n szög a falban, és legyenek S_1, S_2, \dots, S_k az n szög halmazának tetszőleges részhalmazai. Hogyan akasszuk fel a képet az n szögre úgy, hogy a festmény pontosan akkor essen le, ha a kihúzott szögek halmaza tartalmazza valamely S_i halmazt?

A legáltalánosabb megfogalmazás

Probléma

Adott n szög a falban, és legyenek S_1, S_2, \dots, S_k az n szög halmazának tetszőleges részhalmazai. Hogyan akasszuk fel a képet az n szögre úgy, hogy a festmény pontosan akkor essen le, ha a kihúzott szögek halmaza tartalmazza valamely S_i halmazt?

Tétel (Demaine et al. (2012))

A fenti problémának tetszőleges S_i halmazok esetén van megoldása.

Az $(1, n)$ -játék megoldásai

A megoldások hosszát azzal mérjük, hogy hányszor hurkoljuk a madzagot valamely szögre (precízzé tehető).

Tétel (Demaine et al. (2012))

Az $(1, n)$ -problémának van legfeljebb $2n^2$ hosszú megoldása.

Az $(1, n)$ -játék megoldásai

A megoldások hosszát azzal mérjük, hogy hányszor hurkoljuk a madzagot valamely szögre (precízzé tehető).

Tétel (Demaine et al. (2012))

Az $(1, n)$ -problémának van legfeljebb $2n^2$ hosszú megoldása.

Tétel (Fulek, Avvakumov (2017))

A $(1, n)$ -játék megoldása legalább $n2^{\sqrt{\log_2 n}}$ hosszú.

Az $(1, n)$ -játék megoldásai

A megoldások hosszát azzal mérjük, hogy hányszor hurkoljuk a madzagot valamely szögre (precízzé tehető).

Tétel (Demaine et al. (2012))

Az $(1, n)$ -problémának van legfeljebb $2n^2$ hosszú megoldása.

Tétel (Fulek, Avvakumov (2017))

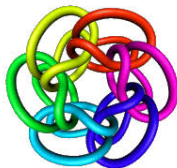
A $(1, n)$ -játék megoldása legalább $n2^{\sqrt{\log_2 n}}$ hosszú.

Ismert még, hogy a (k, n) -játék is polinomiális hosszal megoldható.

A játéknak meglepően sok kapcsolata van a matematika különböző ágaihoz: a fűzések az n elem által generált szabad csoport szavai és a fűzésekhez monoton Boole-függvények rendelhetők nagyon természetes módon. (Mindkét tényt masszívan használja az általam ismert általános megoldó algoritmus.)

Sanyi egyik kedvenc játéka, Brunn-láncok

Spivak feladata lényegében ekvivalens a következő játékkal: kapcsoljunk össze három biztostűt úgy, hogy bármely tűt kinyitva a másik kettő ne legyen összefűződve.



Köszönöm a figyelmet!